# NICOMACHUS OF GERASA

# INTRODUCTION

TO

# ARITHMETIC

*TRANSLATED INTO ENGLISH*

BY

MARTIN LUTHER D'OOGE

*WITH STUDIES IN GREEK ARITHMETIC*

BY

FRANK EGLESTON ROBBINS

AND

LOUIS CHARLES KARPINSKI

New York

THE MACMILLAN COMPANY

LONDON: MACMILLAN AND COMPANY, LTD.

1926

## CAPITOLO IV

### NOTAZIONE ARITMETICA GRECA

LA lingua di ogni nazione riflette senza dubbio, sia nel suo vocabolario che nelle sue peculiarità strutturali, lo sviluppo mentale del popolo. Il rapporto è ovviamente reciproco: lo sviluppo mentale influenza la lingua e la lingua influenza lo sviluppo del pensiero. Soprattutto nella filosofia e nella letteratura questo tipo di influenza è evidente. La filosofia e la letteratura francesi sono in accordo con la genialità della lingua francese, che riflette la chiarezza e la grazia del discorso; la filosofia e la letteratura tedesche sono in netto contrasto, riflettendo l'oscurità e la ponderosità della lingua tedesca, forse inevitabili nella profonda speculazione filosofica.

Nello sviluppo matematico la scelta di una notazione numerica potrebbe, a prima vista, essere considerata una questione indifferente per quanto riguarda il progresso del pensiero scientifico. Tuttavia, così come il linguaggio influenza lo sviluppo della filosofia e della letteratura, ancor più la notazione influisce direttamente sul progresso matematico. I Greci furono sfortunati nella scelta della notazione matematica; a quanto pare si resero conto delle carenze del loro primo sistema, perché intorno al 500 A.C. NE fu adottato uno nuovo, radicalmente diverso nei principi dal vecchio, ma ancora più scomodo dal punto di vista matematico. [1] La relativa mancanza di progressi nell'analisi in Grecia può essere attribuita in larga misura ai goffi sistemi di notazione in uso.

I numeri utilizzati in Grecia sono di tre tipi distinti e separati: i numeri geometrici, i numeri con lettere iniziali e i numeri alfabetici. I più antichi si trovano nelle scritture minoiche recentemente scoperte, che precedono di molto la Grecia classica.

[1] Sir T. L. Heath, *History of Greek Mathematics*, vol. I, pp. 37-39, ha recentemente tentato di dimostrare che la notazione greca non influiva negativamente sulla loro aritmetica. L'affermazione di Heath secondo cui noi facciamo i conti "con le parole" non è corretta; il calcolo in aritmetica e in algebra avviene per simboli. Guardando i numeri non diciamo "tre per due", ma pensiamo subito a "6".

Il sistema utilizzato è più vicino al sistema pittorico degli Egizi che a quello della Grecia successiva. Le forme[1] sono le seguenti:

| | |
|---|---|
| ) or \| = 1, | ))))) or ⁞⁞ = 5, |
| • = 10, | ⁘ = 40, |
| \ or / = 100, | V = ¼ (probably). |
| ◊ = 1,000, | |

I simboli per l'uno e per il dieci assomigliano in modo impressionante ai numeri curvilinei usati nell'antica Babilonia; anche lì si usava il segno semicircolare per l'1, e il cerchio completo per il 10.

Il secondo sistema di numeri adottato in Grecia si basava sulle lettere iniziali delle parole numerali corrispondenti; ma si faceva eccezione per l'unità, che veniva rappresentata, come comunemente ovunque, da un semplice tratto verticale.[2]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Π (or Γ) | from *πέντε* | for | 5; | compare *pentagon*. |
| Δ | from δέκα | for | 10; | compare *decagon*. |
| H | from ἑκατόν | for | 100; | compare *hektaliter*. |
| X | from χίλιοι | for | 1,000; | compare *kilogram*. |
| M (or Mᵛ) | from *μύριοι* | for | 10,000; | compare *myriad*. |

P sostituì presto II per cinque; le combinazioni di P con i simboli di 10, 100, 1.000 e 10.000 furono usate per rappresentare 50, 500, 5.000 e 50.000, quindi: p, P, P e f®.

Γ soon replaced Π for five; combinations of Γ with the symbols for 10, 100, 1,000, and 10,000, were used to represent 50, 500, 5,000 and 50,000, thus: 𐅄, 𐅅, 𐅆, and 𐅇.

Questi numeri sono frequenti nelle iscrizioni attiche e hanno quindi ricevuto il nome di numeri attici. Una descrizione di questi numeri è stata fornita da un grammatico bizantino del secondo secolo dopo Cristo, Erodiano, e di conseguenza la denominazione "numeri erodiani" è stata spesso utilizzata.

Il sistema attico fu sostituito intorno al **500 a.C.-300 a.C.** (data incerta) da un altro tipo di numeri alfabetici in cui nove lettere sono utilizzate per rappresentare le nove unità, altre nove lettere per rappresentare le nove decine e altre nove lettere per rappresentare le nove centinaia, come segue:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | β | γ | δ | ε | ϝ | ζ | η | θ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ι | κ | λ | μ | ν | ξ | ο | π | ϙ |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| ρ | σ | τ | υ | φ | χ | ψ | ω | ϡ |
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
| ,α | ,β | ,γ | ... | | | | | |
| 1,000 | 2,000 | 3,000 | ... | | | | | |

L'alfabeto greco ordinario comprendeva solo 24 lettere, quindi per designare i numeri rimanenti sono stati utilizzati tre caratteri presi in prestito da alfabeti greci più antichi. Questi caratteri, chiamati *επισημα*, sono quelli usati per 6 *(στιγμα* o digamma), per 90 (κοππα) e per 900 (σαμπι). Per distinguere da una parola un gruppo di lettere utilizzate con significato numerico, si usava porre una linea orizzontale sopra le cifre; anche l'accento dopo l'ultima lettera numerica di qualsiasi numero era un segno distintivo.

Per estendere il sistema ai numeri da 1.000 a 999.999, la moltiplicazione per 1.000 di uno qualsiasi dei numeri precedenti veniva rappresentata dal carattere corrispondente con un segno d'accento posto prima di esso e un po' sotto la linea; il simbolo della miriade veniva mantenuto e con uno qualsiasi dei numeri precedenti scritto sopra di esso rappresentava il numero di miriadi dato.

Un esempio di moltiplicazione in questi numeri è riportato da Eutocio, uno scrittore del VI secolo D.C., in un commento alle opere di Archimede;[1] è una delle poche illustrazioni, anche relativamente antiche, delle operazioni fondamentali eseguite con i numeri greci:

| | |
|---|---|
| ψπ' | 780 |
| ψπ' | 780 |
| $\overset{\mu\theta}{M}\overset{\epsilon}{M}\varsigma'$ | 490,000 + 50,000 + 6,000 |
| $\overset{\epsilon}{M}\varsigma\varsigma\upsilon'$ | 50,000 + 6,000 + 6,000 + 400 |
| $\overset{\xi}{M}\eta\upsilon'$ | 600,000 + 8,000 + 400 |

[1] **Eutocio,** *Commentarius in Dimensionem Circuli,* **in** *Archimcdis Optra Omnia cum Commcn-lariis Eutocii* **(ed. Heiberg, 1881), vol. III, p. 290.**

L'uso di lettere con significato numerico era comune tra i popoli semitici, con i quali, in effetti, il sistema potrebbe aver avuto origine. ʳGli arabi continuarono a usare le loro lettere in questo modo anche molto tempo dopo che il nostro attuale sistema induista-arabo divenne noto. Secondo questo schema di rappresentazione dei numeri, a ogni parola viene attribuito un valore numerico. A volte, per motivi di segretezza o di misticismo, si giocava sul valore numerico di una parola o di un nome; gli Ebrei si sono particolarmente appassionati a questo tipo di gioco, dandogli il nome di gematria. Il passo dell'Apocalisse, xiii, 18: "Ecco la saggezza. Chi ha intelligenza conti il numero della bestia, perché è il numero di un uomo, e il suo numero è seicentotre e sei", si riferisce al fatto che alcuni nomi in ebraico, o in lettere greche o anche in numeri romani, hanno il valore numerico 666 (o 616).[1]

Apparentemente il tipo di alfabeto è più semplice del tipo di numeri attici, poiché un numero come 725 è scritto in modo più compatto ψ*κε*, che in simboli attici, PHHAAP. Tuttavia, il guadagno nella scrittura di questi numeri è completamente compensato dalla perdita di semplicità nelle tabelle di addizione e moltiplicazione. La connessione tra 7, 70 e 700 è conservata nella forma di scrittura di questi numeri nello stile attico: P II, F A A, P H H ; mentre ζ = 7, o = 70 e ψ = 700 non hanno alcun legame per quanto riguarda la rappresentazione. La tavola greca delle moltiplicazioni con i numeri alfabetici consisteva in 378 combinazioni; in questo sistema 2 X 3, 2 X 30, 2 X 300, 20 X 3, 20 X 30, 20 X 300, 200 X 3, 200 X 30, 200 X 300 sono combinazioni del tutto distinte, come risulta evidente se si scrivono questi prodotti come dovevano essere appresi, β X γ, β X λ, β X τ, *κ X γ, κ* X τ, *κ* X r, *σ* X *γ,* σ X λ e σ X τ. La complessità dell'addizione non è altrettanto elevata, poiché comprende solo 135 combinazioni contro le 45 con 9 cifre. Questi fatti spiegano probabilmente la mancanza di progressi in campo aritmetico rispetto ai risultati ottenuti dai Greci in altre discipline matematiche.

La rappresentazione delle frazioni nel sistema alfabetico avveniva in diversi modi. Probabilmente il più comune era quello di scrivere prima il numeratore con un accento e poi il denominatore ripetuto, ogni volta con due segni di accento; così ιζ' *κε" κε",* per 17/25.

[1] **È noto che questo passo dell'***Apocalisse* **è un primo commento (secondo secolo o addirittura primo), non un testo originale. Si veda Sanders,** *The Number of the Beast in Revelation, Journal of Biblical Literature*, **vol. XXXVII (1918), pp. 95-99.**

Un altro espediente era quello di scrivere il denominatore come una sorta di esponente attaccato al numeratore, ιζ^κε Le frazioni unitarie erano rappresentate dal semplice denominatore scritto una sola volta e contraddistinto da un accento, solitamente raddoppiato. Questa distinzione delle frazioni unitarie è in accordo con la pratica egiziana, e lo stesso si può dire della rappresentazione di 2/3 e 1/2 con simboli speciali, al di fuori del sistema regolare. Per 2/3 il simbolo è ω, e per 1/2,C^W o C.[1]

Tra i matematici greci che non prestarono particolare attenzione alle frazioni unitarie si possono citare Archimede (250 A.C.) e Diofanto (250 D.C.), mentre tra quelli che lo fecero ci fu Erone di Alessandria, il grande meccanico. Un papiro greco dell'VIII secolo D.C., ritrovato ad Akhmim, utilizza le frazioni unitarie in modo del tutto analogo all'antico Egitto e include i simboli separati di 1/2 e di 2/3.

Un'ulteriore notazione peculiare con numeri alfabetici fu notata da Maximus Planudes[2] nel XIII secolo, ma senza alcuna indicazione della data e del luogo di origine. Questo sistema consiste in scrivere le 27 lettere, ognuna con due punti sovrapposti per rappresentare il numero corrispondente di miriadi, quindi $\beta$ per 20.000, $\gamma$ per 30.000. Il sistema può essere esteso all'infinito e con tre livelli di punti, ad esempio, rappresenta miriadi di miriadi di miriadi; quindi *1* per 100.000.000.000.000. Nicolas Rhabdas di Smirne (fine del XIII secolo) spiega il sistema e afferma che può essere esteso anche all'infinito.[3] Il suggerimento del valore di luogo è evidente, e un dispositivo in qualche modo simile con punti sovrapposti e anche con punti pedice è stato usato dagli arabi con i numeri indù-arabi;[4] così, 5 per 500, 5 per 50*

Un grande matematico come Archimede o Diofanto poteva ampiamente superare le difficoltà create e insite nelle varie notazioni matematiche greche. Tuttavia, per la massa di coloro che si occupavano di studi matematici, le notazioni si rivelarono una barriera insormontabile per il progresso nello sviluppo delle idee aritmetiche e algebriche.

[1] **Hultsch,** *Metrologicorum Scriptorum Reliquiae* **(Leipzig, 1864), vol. I, pp. 173-174.**

[1] **Gerhardt,** *Etudes Historiques stir V A rithmMiquc de Position* **(Programm, Berlino, 1856).**

[a] **P. Tannery,** *Notices sur les deux Lettres Arithmttiqucs de Nicolas Rhabdas,* **in** *Notices et Extraits des Mss. de la Bibliothrque Nationalc,* **vol. XXXII, p. 147.**

[4] **Smith-Karpinski,** *The Hindu-Arabic Numerals* **(Boston, 1911), pagg. 66-67.**

## CAPITOLO VIII

### LA FILOSOFIA DEL NUMERO DI NICOMACO

NELLA discussione della filosofia di Nicomaco sono già state toccate alcune questioni che appartengono alla sua teoria dei numeri. Trattando ulteriormente questa parte della sua dottrina, si scoprirà che, sebbene sulle questioni di base sia in stretto accordo con gli scrittori non pitagorici, in particolare con Aristotele, tuttavia i pregiudizi filosofici della sua setta si intromettono non di rado e fanno sì che Nicomaco introduca a volte elementi non matematici nei suoi pronunciamenti aritmetici. Questo, per quanto fondamentale, non è in fondo il fine principale della composizione dell'opera, né è
è portata a un livello tale da turbare il lettore dell'antichità e del Medioevo, quando tutti gli uomini condividevano in misura sorprendente la venerazione pitagorica per i numeri; senza dubbio questa è una caratteristica del libro, insieme alla sua chiarezza, alla sua concisione e alla sua eccellente organizzazione, che lo ha fatto sopravvivere quando tanti trattati pitagorici sono completamente scomparsi.

La teoria del numero di Nicomaco prende le mosse dall'assunzione delle qualità fondamentali "continuo" o "discreto" per tutte le cose dell'universo, sia delle classi eterne che di quelle transitorie, nelle quali, come si è già visto, egli opera la prima divisione delle cose esistenti. [1] Le cose continue le chiamò *ηνομενα,* "unificate", o αλληλουχουμενα, "che si tengono l'una all'altra", termini che testimoniano la nozione che le loro parti sono in contatto diretto, unificando così l'oggetto.[2] Il discreto è διηρημενα, εν παραθεσει, οιον κατα σορειαν "separato in parti", "in forma di accostamento", "a mo' di mucchio",[3] termini che suggeriscono la concezione di oggetti disposti l'uno accanto all'altro senza toccarsi o fondersi, con le parti dell'oggetto che si unificano.

[1] *Introduzione*, I. 2. 4. *woc6rrjre%* e AXYTFHJ sono tra gli eterni menzionati in I. 1. 3.

* A conferma di questa interpretazione, cfr. Aristotele, *Catcgoriac*, 4 b 25 ft.; dove dopo aver classificato i Quanti come discreti o continui (cfr. p. 113), dice: *r&y pir ydp rod dpidpov poptojp o68tlt tan KOirdt dpot wp&t tv avrdicre 1* rd *popia avrov . . if M ypappij ovyext* tm? - ten ydp \apel* Koirbr 6po¥ wp6i 6r rd popia aCrrrjt avrdwru^ ariyp^y$_y$ kal rrjt 4n<payelaf, ypapp^p^* KT\.

* Cfr. *Tkcologumcna Arithmcticac*, p. 4, 30 (Ast): *rCjv idv re Kar d \ \ r j \ o t d r re Kard wapd$e<uy twiyotoper avriiv crvptjrdnu. . . .* Cfr. anche *ibid.,$_y$* p. 17, 5 ss.

Forse questo aiuta a capire cosa si intende con la parola "flusso" *(χυμα)* nella definizione di numero.

Nicomaco ci dice poi che un oggetto della classe continua è chiamato "grandezza" *(μεγεθος)* e uno della classe discreta "moltitudine" *(πληθος)*; i due termini sono usati sia come astratti riferiti alla qualità, sia come concreti, di oggetti di tali nature.[1] Sebbene si tratti di semplici affermazioni e non si trovino discussioni in merito nelle nostre fonti, vediamo che Nicomaco assume la continuità e la discrezione come qualità sempre associate alla grandezza e alla moltitudine. Non è ancora arrivato alla definizione di numero, ma basta un solo passo in avanti. La grandezza e la moltitudine di per sé sono termini indefiniti, "semplicemente grandi" o "semplicemente molti", come dice Nicomaco.[2] Senza ulteriori limitazioni sono infiniti; il "grande" può essere infinitamente suddiviso e i "molti" infinitamente aumentati. La scienza non può occuparsi di queste cose. Possiamo conoscerle e trattarle scientificamente solo quando si può dire "quanto grandi" e "quanti" sono. Questo non significa affermare una nuova qualità delle grandezze e delle moltitudini, ma semplicemente imporre loro una limitazione, rinunciare a trattare i "molti" e i "grandi" in sé e occuparsi di grandezze e moltitudini di estensione limitata e conosciuta.

È in questo senso, in opposizione a *μεγεθος* e *πληθος,* che Nicomaco utilizza i termini **το πηλικον** (πηλικοτες) e **το ποσον** (ποσοτης), che possono essere tradotti "quantità" e "numero". Inoltre, come si vedrà, quest'ultimo è praticamente sinonimo di numero (αριθμος), poiché è definito come "moltitudine limitata". In questo resoconto dei fondamenti dell'aritmetica, è evidente che Nicomaco segue Aristotele, sebbene la terminologia dei due differisca.

Le parole di Aristotele sono una prova sufficiente. "Il termine "quanto" è usato per ciò che può essere diviso in componenti, di cui l'uno o l'altro è naturalmente una cosa o questa cosa (cioè una cosa individuale). Un quanto è una moltitudine se può essere numerato, e una grandezza se può essere misurato. Si chiama moltitudine ciò che è potenzialmente divisibile in cose non continue; magnitudine ciò che è continuo. Tra le grandezze, quella che è continua in una direzione è la lunghezza;

[1] *Introduzione*, I. 2.4; qui sono individui, ma in I. 2.5, generi; cfr. 1 .16. 2; *Aritmetica Theologumena,* p. 8, 21; p. 9, 28, 34.

in due, la larghezza; in tre, la profondità. E di questi, la moltitudine limitata è il numero; la lunghezza, una linea; la larghezza, una superficie; la profondità, un corpo". [1]

Il termine di Aristotele **το ποσον** è usato in un senso diverso; è quantum, un termine generale, e non una moltitudine limitata. Ma questa è l'unica differenza seria. Magnitudine e moltitudine di per sé sono *μεγεθος* e *πληθος* in entrambi gli autori, e moltitudine limitata *αριθμος*. Aristotele non chiama la grandezza limitata ***το πηλικον*** come fa Nicomaco, ma usa piuttosto i nomi specifici di corpo, superficie e linea, e preferisce *συνεκης* per significare "continuo/non questi punti".
di variazione sono, tuttavia, molto lievi, e per compensarli possiamo indicare i paralleli in Aristotele alla dottrina che la grandezza e la moltitudine sono infinite di per sé.[3] Nel complesso, la dipendenza di Nicomaco da lui è evidente.

Questa divisione degli oggetti in quantità e numeri fornisce a Nicomaco anche la base per la determinazione dei soggetti delle scienze che li trattano, e il risultato è il *quadrivium,* un termine apparentemente usato per la prima volta da Boezio e famoso in tutto il Medioevo.[4] Ciascuna metà del campo comprende due scienze: i numeri assoluti o in sé appartengono all'aritmetica; i numeri nelle loro relazioni reciproche alla musica; la geometria tratta della quantità in quiete e l'astronomia della quantità in movimento. Di fatto, almeno le prime due di queste scienze

[4] Cfr. Gow, *History of Greek Mathematics* (Cambridge, 1884), p. 72, n. 1. La divisione del campo in Teone di Smirne, p. 15, 13 ss. (Hiller), è diversa: (a) aritmetica; (*b*) geometria, cioè geometria piana; (c) stereometria, o geometria solida; (*d*) astronomia (*dorpovopla*), che si occupa di solidi in movimento. Oltre a queste quattro, la musica si occupa del "movimento, dell'ordine e dell'armonia degli astri in movimento"; l'armonia elementare - la teoria matematica delle concordanze, eccetera - è collegata all'aritmetica. Si noti che *opatpiK^* significa astronomia, non stereometria, in Nicomaco; cfr. gli ulteriori riferimenti in I. 3. 7; 5. 2 e Filopono su quest'ultimo passo.

Le definizioni sono arbitrarie e artificiali, e in pratica Nicomaco le ignora, discutendo in una lunga sezione dell'*Introduzione il* numero relativo,[1] che dovrebbe rientrare nella musica, e inoltre trattando i numeri in un'altra parte del libro alla maniera dei piani e dei solidi geometrici.[2] Nicomaco sostiene, e dimostra a lungo, che l'aritmetica è la scienza fondamentale e indispensabile, la base di tutte le altre.[3]

Nicomaco giunge ora alla triplice definizione formale di numero.[4] In primo luogo, egli afferma che il numero è "moltitudine limitata", *πληθος ορισμενον*; in secondo luogo, è "combinazione di monadi", *μοναδων συστημα*; e in terzo luogo, "flusso di numero, composto da monadi", ποσοτητος χυμα εκ μοναδων συγκειμενον. Il primo di questi è identico a quello che è già stato definito come oggetto di studio scientifico nel regno della moltitudine; è equivalente a *ποσον, ποσοτης,* ed è già stato tradotto "numero". Aristotele aveva enunciato la sua definizione di numero all'incirca in questi termini,[6] e si dice che anche Eudosso l'abbia adottata.[6] Secondo questa definizione il numero è semplicemente una specie del genere moltitudine, con la limitazione dei differentia. Sulla natura di questa limitazione Nicomaco non ha nulla da dire, anche se qualche spiegazione è davvero necessaria.

Nella sua seconda definizione Nicomaco è d'accordo con Teone di Smirne[7] e se dobbiamo considerare la testimonianza di Iamblico sul punto, la definizione era antica quanto Talete e fu da lui derivata da fonti egizie.[8] Anche questa si avvicina di più delle tre alla definizione di Euclide, εκ μοναδων συγκειμενον *πληθος*.

La terza definizione non ha paralleli precisi; la seconda definizione data da Theon forse vi si avvicina di più, "l'avanzamento della moltitudine che inizia con la monade e il suo ritiro che termina nella monade",
e questo a sua volta era praticamente identico al

l'espressione usata da Moderato di Cades, il pitagorico.[1] Delle tre, questa è la più genuinamente pitagorica, e fa evidentemente riferimento a quella concezione del numero come flusso che si diparte dalla monade, di cui si dirà più avanti.

Il numero che Nicomaco ha appena definito e che viene trattato nell'*Introduzione* è il numero "scientifico" e non, come la discussione precedente ha mostrato, va identificato con il numero concettuale che era alla base della creazione.[2] È deplorevole che non vi sia da nessuna parte una spiegazione esauriente della relazione tra questi due numeri e, inoltre, che Nicomaco abbia lasciato senza discussione due argomenti trattati a lungo da Teone di Smirne,[3] la monade e la sua controparte, l'uno, e la distinzione tra numeri e cose numerabili (*αριθμοι, αριθμητα). Su questi argomenti siamo ridotti quasi a congetture.

Come ciò di cui ogni numero è composto e in cui può essere ridotto in ultima analisi,[4] la monade e la diade sono individuate da Nicomaco come elementi del numero. Questo può sembrare strano, perché la definizione stessa di "elemento" richiede che si tratti di qualcosa di ultimo, incapace di ulteriori analisi, e la diade, che è due volte 1, apparentemente non risponde a questo requisito. Anche nelle stesse affermazioni di Nicomaco si può sostenere questo, perché in alcuni passaggi egli dice abbastanza chiaramente che la diade deriva dal raddoppio della monade,[6] o che tutti i numeri sono costituiti da monadi,[6] mentre, d'altra parte, nell'*Introduzione fa* spesso riferimento alla diade, oltre che alla monade, come elemento del numero.[7] Tuttavia, questa deve essere considerata solo una piccola incoerenza, perché è certo che la diade era elementare secondo il suo sistema numerico, e la ragione può essere determinata.

[1] Stobeo, *Exlogs* I, *Prooem.* 8, vol. I, p. 21 (ed. Wachsmuth-Hense).

[1] Cfr. pag. 98.

* P. 18, 3 - 21, 19 (Hiller).

[4] Questa è la definizione di Nicomaco di "elemento". 1. 1.

[1] Si veda l'*Introduzione*, II. 17,1 (p. 109, 6 H.), e la divisione di 2 in 2 unità, come 1,8. 4-5. Anche nell'*Aritmetica Teologumena*, dove per la maggior parte si parla della diade come elementare, è implicito che la monade la produce; ad esempio, p. 6 (Ast): *ai *bvddot* 7dp *Sia^oprjOeura.*
Si vedano anche i passaggi in cui si pensa che la diade e gli altri numeri progrediscano dalla monade; p. 116, con il n. 2.

[8] *Ibidem,* I. 7.1 (la definizione di numero); 8,2; 10 (p. 16, 16 H.); 11,3; II. 6. 2-3; 7.3. Cfr. anche espressioni come SiaXiibiuvo% *clt pavdbs,* II. 8. 1 e nei capitoli seguenti. I. 11. 3 è particolarmente istruttivo.

[7] *Ibidem,* II. 1. 1; 17. 2; 18. 1,4. I passi importanti dell'*Aritmetica Teologumcna* saranno citati nella trattazione che segue.

Si può cercare una spiegazione della questione seguendo due linee di argomentazione simili che alla fine si fondono. Secondo la prima, si possono considerare la monade e la diade come fonti, origini o inizi *(αρχαι)* del numero e, in secondo luogo, come suoi elementi (στοιχεια).

Il metodo di approccio di Nicomaco lungo la prima linea è grafico e dipende in qualche modo dall'aiuto della geometria e delle sue concezioni fondamentali.[1] In geometria si parte dal punto, che è indimensionale. Questo è l'inizio della prima forma dimensionale, la linea, e il movimento del punto genera la linea. Nicomaco aveva un'idea simile della natura della moltitudine e del numero: essi formano una serie, come un flusso in movimento, che procede dall'unità, la monade.[2] Come il punto non fa parte della linea (perché è indimensionale, mentre la linea è definita come ciò che ha una dimensione), ma è potenzialmente una linea, così la monade non fa parte della moltitudine né del numero, sebbene sia l'inizio di entrambi e potenzialmente di entrambi.[3] La monade è unità,[4] assenza di moltitudine, potenzialità;[6] da essa la diade prima si separa e "va avanti"[6] e poi in successione seguono gli altri numeri. Ora, tutto questo riguarda la monade molto più della diade, e infatti è la prima che Nicomaco distingue come il *αρχη* per eccellenza; la diade è piuttosto "come un inizio", αρχοειδης.[7]

Infatti, nel passaggio dall'unità alla moltitudine, afferma, non incontriamo un numero vero e proprio finché non arriviamo alla triade[1] e la diade non è né una cosa né l'altra.[2]

I motivi reali di questa nozione non sono facili da cogliere nello stato frammentario delle prove. Non sembra essere una ragione conclusiva il fatto che la diade non possa essere divisa, come gli altri numeri pari, in parti uguali e disuguali,[3] né che, mentre l'1, in quanto elemento e origine, dà una somma maggiore del suo prodotto ($1 + 1 > 1 \times 1$), e i numeri veri danno caratteristicamente un prodotto maggiore della loro somma (ad esempio, $3 \times 3 > 3 + 3$), il prodotto di 2 per 2 è uguale alla somma di 2 -f 2, costituendo così il 2 una via di mezzo tra unità e moltitudine.[4] Queste sono entrambe le ipotesi; ma una ragione più fondamentale agli occhi di Nicomaco sembra essere che i numeri reali devono avere forma (ειδος) e disposizione (σχημα), o, come dice lui, essere una vera "combinazione" (συστημα) di monadi; e la diade fallisce in tutti questi particolari, mentre la triade soddisfa le condizioni.

Come dice Nicomaco, "ogni cosa nel mondo è 'una' secondo la monade naturale e sistematizzante in essa, e ancora ogni cosa è separabile nella misura in cui partecipa della diade, connessa con la necessità e la materia; perciò il loro congresso ha prodotto la prima moltitudine, l'elemento delle cose, che sarebbe un triangolo, sia di grandezze che di numeri, corporei o senza corpo. Infatti, come il caglio caglia il latte che scorre grazie alla sua peculiare facoltà creativa e attiva, così la forza unificante della monade che avanza sulla diade, fonte di facile movimento e disgregazione, ha inflitto un legame e una forma, cioè il numero, alla triade; perché questo è l'inizio del numero reale, definito dalle combinazioni di monadi. Ma anche la diade è una monade, per la sua natura di inizio".[5]

[1] Cfr. le note precedenti.

La diade non ha forma, mentre la triade sì, perché la diade, in quanto "alterità", è infinita: "Sembra anche essere l'"infinito", poiché è l'"altro", e questo inizio con il prossimo all'uno va all'infinito". [1] È "senza disposizione, perché dal triangolo e dalla triade avanzano i poligonali veri e propri fino a un numero infinito di lati; ma nessuna figura piana è mai stata composta da due linee rette o da due angoli; quindi è solo in accordo con questo che abbiamo l'"indefinito" e il "senza disposizione"". [2] Un ulteriore fattore da tenere in considerazione è che la triade è la prima a mostrare quella che Nicomaco chiama "sequenza naturale", cioè il possesso di inizio, mezzo e fine. In quanto tale, rappresenta l'idea di completezza, e la diade non è all'altezza del suo standard.[3]

La seconda modalità di dimostrazione, basata sul carattere elementare della monade e della diade, è più soddisfacente ed è già stata preannunciata nella discussione della filosofia di Nicomaco. Lì si è visto che la monade e la diade erano in realtà identificate con "l'identico" e "l'altro",[4] cioè non sono tanto i numeri in sé quanto le forme che vengono impresse ai numeri e alle cose. Se poniamo la questione sulla base della logica aristotelica, di cui Nicomaco è tanto appassionato, diventa evidente che non si tratta di veri numeri *(ενεργεια, εντελεχεια)*, ma solo di forme, e poiché le fonti di numeri, sono essi stessi numeri potenziali *(δυναμει)*.

La frequente ricorrenza di questi termini permette di adottare questo punto di vista. Inoltre, l'analisi dei numeri mostra in essi la presenza della monade e della diade, dell'"unità" e dell'"alterità" come elementi. I principali esempi citati da Nicomaco sono i numeri dispari, quadrati e cubici, che sono caratterizzati da "uguaglianza", e i numeri pari ed eteromeci, che mostrano "alterità".

[4] Cfr. pag. 100.

Il motivo per cui i dispari e i pari hanno queste qualità, come afferma Nicomaco,[1] è che "le loro specie sono formate" *(ειδοποιεισθαι)* rispettivamente dalla monade e dalla diade.[2] I quadrati e i cubi, da un lato, e i numeri eteromechi, dall'altro, ricevono "uguaglianza" e "alterità" dal fatto che la loro composizione dipende dai numeri pari e dispari e, inoltre, la mostrano o nell'uguaglianza dei loro lati o, nel caso dei numeri eteromechi, nella loro disuguaglianza.[3] I cubi, in un senso particolare, sono il prodotto di numeri dispari e sono ancora più "uguali". [4] Gli elementi di queste serie sono quindi la monade e la diade e, come abbiamo visto, si identificano praticamente con le forme.

Ma dopotutto la diade non è mai sullo stesso piano della monade come elemento; una piccola indicazione del sentimento di Nicomaco si vede nella sua osservazione piuttosto condiscendente che è "una monade in un certo senso" e nella sua designazione "simile a un inizio" per essa.[6] In fondo è la monade il vero inizio della serie numerica. È ciò che "rimane", sempre uguale a se stesso e nelle operazioni matematiche conferisce la stessa persistenza agli altri numeri;[6] anche la monade è potenzialmente tutti i numeri.[7] Si è già notato che la serie numerica è paragonata a un flusso in movimento, che parte dalla monade, che occupa il posto di un punto, e nel primo movimento passa alla diade, che introduce l'"alterità" dopo l'unità assoluta della monade.[8] Il movimento si estende poi alla triade, la prima vera

[1] Cfr. *Introduzione*, II. 17. 2, e Iamblichus, *In Nicomachi Arithmeticam Introductions Liber*, p. 12, 26 ss. Sebbene Nicomaco non ne faccia menzione, era un'antica nozione pitagorica che[4] dispari ' e[4] pari ' fossero rispettivamente finiti e infiniti perché l'uno resiste, l'altro ammette, la dicotomia: Simplicio, *Physica Ausadtatio*, p. 105 a: *olroi rbw drttpoy rhv ttpnor dpiBpbv fKeyov,* did *rd TT av pkv &priov₉ <paair ol i^yfyrjral,* e/t *ter a StatpciaOai, rb bk rli t<ra btaipoOpbtyou Aireipov* /card *T)JV btxoropiar.* È stato inoltre osservato il comportamento di[4] dispari ' e[4] pari[9] nell'addizione e nella moltiplicazione.

[7] *Introduzione,* II.17.2; 18.1,4; 20.2. La ragione per cui il[4] dispari ' è[4] dato in forma specifica ' dalla monade sembra essere almeno in parte spiegata dalla definizione del[4] dispari ' (I. 7. 2); mentre 2 è sempre un fattore del 'pari'. Inoltre, questi numeri sono stati i primi delle due classi, anche se c'è stata una certa disputa su questo punto, e sembrano incarnare[4] la stranezza * e[4] la parità * nello stesso modo in cui[4] l'uguaglianza ' e[4] l'alterità.[1]

[3] Piazze : *Introduzione*, II. 17. 3; 18. 3; numeri eteromeci, *ibidem,* e II. 18. 1.

[4] *Ibid.,* II. 20. 5. [5] Sec. p. 116, con note 6 e 7. -

[6] *Introduzione*, II. 6. 3; 17.4; *Thcologumcna Arithmeticae*, p. 3, 2 ss. Si noti che *porjj* e *filruv* erano termini tecnici nella teologia neoplatonica per descrivere l'esistenza immutabile di Dio; cfr. Plotino, *Enneadi*, I. 7.1, e l'applicazione cristiana dello stesso termine in Agostino, *Dc Gcnesi ad Littcram*, IV. 18. 34. La dottrina neopitagorica della monade ha probabilmente un ruolo nello sviluppo di questa idea. [7] Cfr. p. 116, n. 5.

[8] *Thcologumcna Arithmeticae*, p. 8, 11 : *dpx^t*re *al *wvSp.*TJK aura**l *rijt rod dptSpov brepoeibciat tear tUbva* vXiyi; *Introduzione*, II. 17. 5 : *brcpbrrfrot Karapicru*

e così via fino alla decade, che in un certo senso ripete la monade. [1] Cioè, nella serie io, 20, 30 . . . 100 che la monade ha nella serie 1, 2, 3 . . . 10, e tutti i termini compresi tra 10 e 100 sono costituiti da componenti di queste due serie, singolarmente o in combinazione. La serie continua ancora, con 100, 1.000 e 10.000 che assumono successivamente la posizione della monade nelle rispettive serie o corsi, e per questo motivo furono chiamate dai pitagorici "monadi del secondo, terzo, ecc. corso". I Pitagorici, inoltre, non riconoscevano che il 12, ad esempio, potesse essere posto alla fine della prima serie esattamente come il 10; erano convinti che il 10 fosse divinamente e naturalmente costituito come culmine della serie e che nessun altro potesse competere con esso. Si trattava di un'operazione della "natura" contrapposta alle "convenzioni umane" - un contrasto che Nicomaco ama sottolineare[a] - e testimoniata dal possesso da parte dell'uomo di dieci dita delle mani e dei piedi, dalle dieci categorie e dalle dieci forme di numero relativo.[3]

In questo movimento del numero dalla monade Nicomaco immagina il suo avanzamento per gradi, o luoghi *(χοραι)* occupati dai termini successivi *(οροι)* o dal numero; perché il numero, si ricorderà, è una proprietà del discreto. Il sistema numerico si basa quindi sui numeri interi e Nicomaco non considera lo zero come parte di esso.[4] L'inizio della serie è l'1, perché anche se l'1 e il 2 non sono numeri veri e propri, iniziano la serie numerica e Nicomaco li usa costantemente esattamente come gli altri.

Inoltre, la serie numerica è "per natura meravigliosa e divina" un'armonia, cioè "un'unificazione del diverso e una concordia del discordante".[6] Tutte le armonie devono essere costruite a partire dagli opposti, e nel numero questi sono naturalmente lo "stesso" e l'"altro", come si vede soprattutto nei numeri pari e dispari e nei loro derivati. Il pari e il dispari testimoniano fin dall'inizio la costruzione armonica dell'intero sistema con la loro presenza a posti alterni nella serie naturale.[6] L'armonia dei numeri, che è naturalmente

[1] Sul numero come flusso in movimento, cfr. p. 116. Sulle * monadi dei corsi[9] e sul sistema decimale pitagorico, cfr. I. 19. 17 e nota *ad loc.*

[7] Cfr. *Introduzione*, I. 6. 4; 23. 7; II. 3. 2; 17. 2; *Thcologumena Arithmetical,* p. 3, 25 (Ast).

[1] L'unico riferimento nell'*Introduzione* alla sacralità della decade è II. 22.1; ma si confronti il *Theologumcna Arithmcticae* in tutto il capitolo sulla decadenza.

[4] L'unico riferimento allo zero nell'*Introduzione* è in II. 6. 3, e qui non si tratta di un termine.

[5] Si tratta di una citazione di Filolao citata in II. 19.1. La maggior parte dei dati sull'armonia delle serie naturali si trova in I. 6. 2 e segg.

[4] *Introduzione*, I. 6. 4.

Per Nicomaco la prova dell'armonia dell'universo si manifesta in ogni sorta di regolarità osservate nelle relazioni tra i numeri; quelle che Nicomaco si diletta a indicare come prove del "buon ordine",[1] dell'"amicizia" e della "cooperazione"[2] dei numeri sono per lo più l'inflessibile funzionamento delle regole e la constatazione che i numeri di certi caratteri specifici ricorrono a intervalli prestabiliti o nella serie naturale o in qualche altro gruppo regolarmente costituito da essa, come, ad esempio, i numeri dispari o i doppi.[3] La scoperta di altri fatti deve aver aiutato molto i matematici pitagorici nella loro fede nell'armonia, per esempio la scoperta delle concordanze musicali nei primi numeri della serie naturale e nei numeri dei lati, degli spigoli e degli angoli del cubo.[4] *

L'armonia, tuttavia, non deve essere fondata solo su una serie di opposti, ma su opposti che non siano irrazionali tra loro. [6] Questo requisito è soddisfatto dai numeri della serie naturale. Essi hanno certe relazioni fisse tra loro, capaci di essere espresse e definite, che Nicomaco studia sotto il titolo di numero relativo.[6] La relazione fondamentale di due termini qualsiasi è l'uguaglianza tra loro;[7] altre relazioni varieranno da una parte o dall'altra, e i numeri si supereranno o saranno superati l'uno dall'altro secondo i vari rapporti. Possiamo lasciare a Nicomaco stesso l'esposizione di questo argomento, anche se si può notare che egli dà una definizione inadeguata di rapporto.[8]

Un'altra caratteristica dei numeri, che non riguarda tanto le loro relazioni reciproche quanto se stessi in assoluto, è la loro capacità, secondo le idee di Nicomaco, di conformarsi a disposizioni geometriche.[9] Fondamentalmente ciò si basa sulla definizione di numero come combinazione di monadi e sull'ulteriore presupposto che le monadi costituenti qualsiasi termine siano in grado di disporsi (σχημα). Se questo è vero, le disposizioni possono essere lineari, piane o solide, e possono imitare una qualsiasi delle figure riconosciute dalla geometria. Un'esempio

[1] Vedi *€vra(la, €vraKro%* nell'indice di Hoche.

[7] *Introduzione,* II. 19. 1.

[s] Esempi di questo tipo si trovano nelle sezioni in cui Nicomaco descrive la "generazione* di alcuni tipi di numeri, ad esempio i multipli, I. 18. 4 ss. Il confronto regolare dei termini tra due serie dà alcuni tipi di rapporto in ordine regolare; cfr. I. 19. 8 ss.

[4] *Introduzione*, II. 15. 4; 26. *2*, sulle concordanze musicali scoperte nel cubo. Aritmo-
Gli autori logici sottolineano che il 4 comprende le armonie principali.

[6] *Ibidem,* I.6.3. [7] *Ibid.,* I.23.6; II.1. 1-2.

[8] *Ibid.,* I. 17 e capitoli seguenti. [8] *Ibid.,* II. 21. 3; si veda la nota *ad loc.*

[9] *Ibid.,* II. 6 e seguenti, tratta dei numeri piani e solidi.

di questo tipo di pensiero è già stata incontrata, implicita nell'affermazione che la triade ha un inizio, un centro e una fine, che non può avere alcun significato se non implica che la triade deve essere considerata come una disposizione lineare di tre monadi, i i i.[1] Numeri di questo tipo sono chiamati lineari *(grammikoi,* II. 6. i). Ma queste tre monadi possono essere facilmente disposte in due dimensioni come in una, e allora formeranno un triangolo, e lo stesso si può fare con qualsiasi numero che sia la somma delle serie naturali da i a qualsiasi termine. Il numero triangolare è la forma elementare del numero piano, così come il triangolo è l'elemento delle figure piane in generale;[2] * ma i numeri sono in grado di disporsi anche sotto forma di quadrati, pentagoni e tutti i poligoni regolari, oltre che sotto forma di parallelogrammi di ogni tipo. Inoltre, se si aggiunge una terza dimensione e si raggruppano le monadi in più di un piano, si possono costruire tutti i tipi di numeri solidi.

Rimane da sottolineare un altro punto: i pitagorici non potevano considerare i numeri nel modo freddo e imparziale del matematico moderno e Nicomaco è in questo senso in sintonia con loro. I numeri sono le fonti della forma e dell'energia nel mondo; sono dinamici, attivi anche sui loro stessi simili; perciò si trasmettono reciprocamente qualità e talvolta assumono un carattere quasi umano nella loro capacità di influenza reciproca. Abbiamo già osservato che la monade dona "uguaglianza" e permanenza, la diade "alterità" e disuguaglianza. Inoltre, i numeri perfetti sono paragonati alle cose buone e sono quindi pochi, mentre quelli "sovrabbondanti" e "carenti", come i vizi e le cose cattive, sono molti". La decade possiede un altro tipo di perfezione, che però la contraddistingue ancora di più.

Tutto ciò è significativo di un tipo di pensiero che dota i numeri di qualità che non sono in alcun modo matematiche, considerandone alcuni migliori o peggiori,[4] * più giovani o più vecchi[6] di altri, e permettendo loro di

[1] Sec. p. 105. Una concezione simile è implicita nella definizione di I. 7. 2. Si può notare che la diade è chiamata <*rx[1] ht[ILaTo] * Afwipot, Aritmetica teologumena*, p. 8.

* *Introduzione,* II. 7. 4" 5; 12. 8; *Aritmetica Theologumena*, pp. 8, 18. Per uno schizzo piuttosto completo dell'ulteriore sviluppo dei numeri poligonali si rimanda il lettore al capitolo "Numeri poligonali, piramidali e figurati", in *History of the Theory of Numbers* di L. E. Dickson, vol. II (Carnegie Institution, Washington, 1920), pp. 1-39.

[9] *Introduzione,* I. cc. 14-16.

[4] *Ibid.,* I. 23. [4]4 implica che l'uguaglianza è "migliore" e "più antica" della disuguaglianza.

[1] In *ibid.,* I. 19. 8, 14, si dimostra che il multiplo è "più antico" del superparticolare. Più originale" è senza dubbio l'idea fondamentale; ma con "più antico" il greco intende anche "più onorato".

di trasmettere i caratteri, come i genitori alla loro progenie.[1] Di conseguenza, nell'*Introduzione si* riscontra una tendenza a classificare in gruppi di tre, che è stata notata dagli storici della matematica; infatti leggiamo nei *Theologumena Arithmeticae* che il numero 3 sembra influenzare molto la scienza aritmetica a causa delle classificazioni triplici che vi si trovano.[2] Il fatto che un simile trattamento dei numeri si trovi nel *Theologumena Arithmeticae* non è affatto sorprendente, ma l'*Introduzione* stessa non ne è affatto esente e, sebbene il lettore moderno possa trovare tale procedura poco scientifica, essa conferisce al libro il fascino della singolarità.

[1] *Introduzione*, I. 23. 6 (l'uguaglianza è la madre e la radice della disuguaglianza); I. 4. 1 (l'aritmetica è la "madre" della geometria, ecc.)

[1] *Theologumena Arithmeticae*, p. 15, 23 ss. (Ast).

# PARTE II

## TRADUZIONE DELL'*INTRODUZIONE ALL'ARITMETICA* DI NICOMACO DI GERASA, IL PITAGORICO

# LIBRO I

## CAPITOLO I

Gli antichi, che sotto la guida di Pitagora hanno reso sistematica la scienza, definivano la filosofia come l'amore per la saggezza· In effetti il nome stesso significa questo, e prima di Pitagora tutti coloro che possedevano la conoscenza erano chiamati "sapienti" indistintamente: un falegname, per esempio, un ciabattino, un timoniere, e in una parola chiunque fosse esperto in qualsiasi arte o mestiere. Pitagora, tuttavia, restringendo il titolo in modo da applicarlo alla conoscenza e alla comprensione della realtà, e chiamando la conoscenza di verità in questa l'unica saggezza,designò naturalmente il desiderio e il perseguimento di questa conoscenza filosofia, come desiderio di saggezza.

Egli è più degno di credenza di coloro che hanno dato altre definizioni, poiché chiarisce il senso del termine e della cosa definita. Questa "sapienza" egli la definisce come conoscenza, o scienza,verità nelle cose reali, intendendo per "scienza" la comprensione ferma e decisa della sostanza sottostante, e per "cose reali" quelle che continuano uniformi e uguali nell'universo e non si allontanano mai, neppure per poco, dalla loro esistenza; queste cose reali[2] sarebbero cose immateriali, partecipando sostanza di cui tutto il resto che esiste sotto lo stesso nome ed è così chiamato è detto "questa cosa particolare "[3] ed esiste.

3 Le cose corporee e materiali, infatti, sono perennemente coinvolte in un flusso e in un cambiamento continui, a imitazione della natura e della qualità peculiare di quella materia e sostanza eterna che è stata fin dall'inizio e che è sempre stata mutevole e variabile· Le cose senza corpo, tuttavia, di cui concepiamo in connessione o insieme alla materia, come qualità, quantità,[2] configurazioni, grandezza, piccolezza, uguaglianza,relazioni, attualità, disposizioni, luoghi, tempi, tutte queste cose, in una parola, in cui sono comprese le qualità che si trovano in ogni corpo - tutte queste sono di per sé immobili e immutabili, ma accidentalmente partecipano e prendono parte alle affezioni del corpo a cui appartengono.

4 È con queste cose chela "saggezza" si occupa in particolare ma accidentalmente anche delle cose che le condividono, cioè i corpi.

## CAPITOLO II

1 Quelle cose, invece, sono immateriali, eterne, senza fine, ed è loro natura persistere sempre uguali e immutabili, rimanendo nel loro essere essenziale, e ciascuna di esse è chiamata reale in senso proprio. Ma le cose che sono coinvolte nella nascita e nella distruzione, nella crescita e diminuzione, in tutti i tipi di cambiamento e partecipazione, sono viste variare continuamente, e sebbene siano chiamate cose reali, con lo stesso termine delle prime, nella misura in cui ne partecipano, non sono effettivamente reali per la loro stessa natura; perché non rimangono nemmeno per un breve momento nella stessa condizione, ma passano sempre oltre in tutti i modi.

2 Tipi di cambiamenti. Per citare le parole di Timeo, in Platone, [3] "Che cosa è che è sempre, e non ha nascita, e che è quello che è sempre in divenire ma non è mai? L'uno è percepito dagli uomini...

[2]Terminologia aristotelica. I tardo pitagorici attribuirono così al loro fondatore molto che egli non avrebbe mai potuto dire.

[3] *Timeo*, 27 D. Nicomaco segue fedelmente l'originale, con solo piccole variazioni. Le sue citazioni di Platone non sono di solito così esatte; cfr. I. 3. 5, 7.

tal processo, con ragionamento, ed è sempre lo stesso; l'altro può essere indovinato dall'opinione in compagnia del senso irragionevole, una cosa che diventa e passa, ma non è mai veramente".

Pertanto, se desideriamo la meta che è degna e adatta all'uomo, 3
e cioè la felicità della vita [1] - e questo si ottiene con la sola filosofia e con nient'altro, e filosofia, come ho detto, significa per noi desiderio saggezza, e la saggezza la scienza della verità nelle cose, e delle cose alcune sono propriamente chiamate così, altre condividono semplicemente il nome - è ragionevole e quanto mai necessario distinguere e sistematizzare le qualità accidentali delle cose.

Le cose, poi, sia quelle propriamente dette sia quelle che hanno semplicemente questo nome, sono alcune unificate e continue, per esempio un animale, l'universo, un albero, esimili, che sono propriamente e peculiarmente chiamate"grandezze"; [1 2] altre sono discontinue, disposte una accanto all'altra e, per così dire, in mucchi, che sono chiamate "moltitudini", un gregge, per esempio, un popolo, un mucchio, un coro, e simili.

La saggezza, quindi, deve essere considerata come la conoscenza di queste due forme. Poiché, tuttavia, tutte le moltitudini e le grandezze sono per loro natura necessariamente infinite - poiché la moltitudine parte da una radice definita e non smette mai di aumentare; e la grandezza, quando la divisione a partire da un insieme limitato viene portata avanti,non può portare il processo di divisione alla fine, ma procede quindi all'infinito - e poiché le scienze sono sempre scienze di cose limitate, e mai di infiniti, è evidente che una scienza che si occupi della grandezza, di per sé, non si potrebbe mai formulare , perché ognuna di esse è illimitata in se stessa, la moltitudine nella direzione del più,e la magnitudine nella direzione del meno. Una scienza, tuttavia, sorgerebbe per trattare qualcosa di separato da ciascuna di esse, con la quantità, separata dalla moltitudine, e la grandezza, separata dalla magnitudine.

## CAPITOLO III

1 Ancora una volta, per ricominciare da capo, poiché una quantità è vista da sola, senza alcuna relazione con altro, come"pari", "dispari", "perfetta" e simili, mentre l'altra è relativa a qualcos'altro ed è concepita di insieme alla sua relazione con un'altra cosa, come 'doppio/ 'maggiore/ 'più piccolo/ 'metà/ 'una volta e mezza/ 'una volta e un terzo/ e così via, è chiaro che due metodi scientifici porranno in di e tratteranno l'intera indagine[1] della quantità; aritmetica, quantità assoluta e la musica, quantità relativa. [2]

2 E una volta di più, in quanto una parte della 'grandezza è in uno stato di riposo e stabilità, e un'altra parte in movimento e rivoluzione, due altre scienze allo stesso modo tratteranno accuratamente della 'grandezza/ geometria la parte che rimane ed è in riposo, l'astronomia quella che si muove e ruota.

Senza l'aiuto di questi, dunque, non è possibile trattare con precisione le forme dell'essere né scoprire la verità nelle cose, la cui conoscenza è saggezza, ed evidentemente nemmeno filosofare correttamente, perché "come la pittura contribuisce alle arti minori verso la correttezza della teoria, così in verità le linee, i numeri, gli intervalli armonici, e le rivoluzioni dei cerchi aiutano l'apprendimento delle dottrine della saggezza", dice il pitagorico Androcide. [1] Anche Archita di Tarquinia[2] , all'inizio del suo trattato *sull'armonia,* dice la stessa cosa, più o meno con queste parole: "Mi sembra che facciano bene a studiare la matematica, e non è affatto strano che abbiano una conoscenza corretta di ogni cosa, di ciò che è. Infatti, se conoscevano correttamente la natura del tutto, era anche probabile che vedessero bene qual è la natura delle parti. Sulla geometria, infatti, sull'aritmetica e sull'astronomia, essi hanno tramandato a noi una chiara comprensione, e non ultimo anche sulla musica. Infatti, queste sembrano essere scienze sorelle, perché trattano argomenti fratelli, le prime due forme dell'essere".

3 Anche Platone, alla fine del tredicesimo libro delle *Leggi*,[3] a cui

[3] (*Epinomio*) Il passo originale recita: "Ogni figura geometrica, sistema di numeri, composizione dell'armonia e regolarità nella rivoluzione degli astri devono apparire a chi impara correttamente, come un unico principio in tutti i casi; e appariranno così, se, come diciamo, si impara correttamente, guardando a una cosa sola. Infatti, a loro avviso, esisterà naturalmente un unico legame tra tutte queste cose; e se qualcuno vorrà seguire questi argomenti in un altro modo, dovrà chiamare in suo aiuto la Fortuna, come abbiamo detto. Infatti, senza queste scienze non sorgerà mai un essere fortunato nelle città;ma questo è il modo, questo il nutrimento, questi gli insegnamenti, siano essi duri o facili; in questo modo si deve procedere, e trascurarli è empio davanti agli dèi. E l'uomo che ha compreso tutto questo in questo modo, questo uomo io lo chiamo il migliore veramente saggio, e così sostengo anche io sia per scherzo che sul serio "

alcuni danno il titolo *Il filosofo*, perché in esso indaga e definisce che tipo di uomo deve essere il vero filosofo, nel corso del suo riassunto di ciò che era stato precedentemente esposto e stabilito in modo esauriente, aggiunge: "Ogni diagramma, ogni sistema di numeri, ogni schema di armonia e ogni legge del movimento degli astri dovrebbe apparire uno a chi studia correttamente; e ciò che diciamo apparirà correttamente se si studiano tutte le cose guardando a un unico principio, perché si vedrà che c'è un unico legame per tutte queste cose, e se qualcuno tenta la filosofia in un altro modo deve invocare la Fortuna per assisterlo. Perché non c'è mai un sentiero senza queste cose; questa è la via, questi gli studi, siano essi difficili o facili; per questa via si deve andare,senza trascurarla. Colui che ha raggiunto tutte queste cose nel modo che ho descritto, da parte mia lo definisco il più saggio, e questo lo sostengo attraverso

6 spesse e sottili". ponti che portano le nostre menti dalle cose percepite dal senso e dall'opinione a quelle comprese dalla mente e dalla comprensione, e da quelle materiali, fisiche, i nostri figli adottivi conosciuti fin dall'infanzia, alle cose che non conosciamo, estranee ai nostri sensi, ma nella loro immaterialità ed eternità più affini alle nostre anime, e soprattutto alla ragione che è nelle nostre anime.

7 E così anche nella *Repubblica* di Platone, quando l'interlocutore di Socrate sembra portare alcune ragioni plausibili sulle scienze matematiche, per dimostrare che esse sono utili alla vita umana, aritmetica per fare i conti, le distribuzioni, i contributi, gli scambi, e le collaborazioni, la geometria per gli assedi, la fondazione delle città e santuari, e spartizione delle terre, la musica per le feste, l'intrattenimento e il culto degli dei, e la dottrina delle sfere, astronomia o, per l'agricoltura, la navigazione e altre imprese, rivelando in anticipo la procedura corretta e la stagione adatta, Socrate, rimproverandolo dice :"Tu mi diverti, perché sembri temere che siano studi inutili quelli che ti consiglio; ma questo è molto difficile, anzi,impossibile. Perché l'occhio dell'anima, accecato e sepolto da altri studi, si riaccende e si risveglia solo grazie a questi e a questi.

[1] Riferimento all'*intestino* come parte più alta dell'anima, in accordo con l'antica visione che l'anima è composta da parti.

Meglio che si salvi questo che migliaia di occhi corporei, perché solo da esso si vede la verità dell'universo". [1]

## CAPITOLO IV

Quale di questi quattro metodi dobbiamo imparare per primo?
Che esiste naturalmente prima di tutti, è superiore e prende il posto di origine e di radice e, per così dire, di madre rispetto agli altri. E questa è l'aritmetica,[3] non solo perché abbiamo detto che esisteva prima di tutte le altre nella mente del Dio creatore come un piano universale ed esemplare,basandosi sul quale come disegno e esempio archetipico il creatore dell'universo mette in ordine le sue creazioni materiali e le fa giungere al loro giusto fine; ma anche perché è naturalmente anteriore nella nascita, in quanto abolisce con sé le altre scienze,[4] ma non viene abolita insieme ad esse. Per esempio, "animale" è naturalmente antecedente a "uomo", perché se si abolisce "animale" si abolisce "uomo"; ma se si abolisce "uomo", non ne consegue che si abolisca anche "animale". E ancora, "uomo" è antecedente a "maestra", perché se "uomo" non esiste, non esiste nemmeno "maestra", ma se "maestra" non esiste, è ancora possibile che "uomo" sia. Quindi, poiché ha la proprietà di abolire le altre idee con se stessa, è anche la più antica.

3 Al contrario, questo è chiamato più giovane e più posteriore, il che implica che ma non è implicito in essa, come "musicista", che implica sempre "uomo". Prendiamo di nuovo' cavallo '; ' animale ' è sempre implicato insieme a "cavallo", ma non il contrario; infatti, se esiste "animale", non è necessario che esista"cavallo"né se esiste "uomo", deve essere implicato anche "musicista".

i

4 Così è per le scienze precedenti; se esiste la geometria, deve essere implicata anche l'aritmetica, perché è con l'aiuto di quest'ultima che possiamo parlare di triangolo, quadrilatero, ottaedro, icosaedro, doppio, ottuplo, o una volta e mezza, o qualsiasi altra cosa del genere che viene usata come termine dalla geometria, e queste cose non possono essere concepite senza i numeri che sono impliciti in ciascuna di esse. Infatti, come si può parlare di 'triplo' se prima non esiste il numero 3, o' ottuplo 'senza l'8? Ma al contrario 3, 4 e gli altri potrebbero essere

c senza che esistano le figure a cui danno il nome. Quindi l'aritmetica abolisce la geometria insieme a se stessa, ma non è abolita da essa, e mentre è implicata dalla geometria, non implica essa stessa la geometria.

,

## CAPITOLO V

1 E ancora una volta questo è vero nel caso dellamusica; non solo perché l'assoluto è precedente al relativo, come "grande" a "più grande" e "ricco" perché le armonie musicali, diatessaron, diapente e diapason, prendono il nome da numeri; allo stesso modo tutti i loro rapporti armonici sono aritmetici perché il diatessaron è il rapporto di3, il diapente quello di3:2, e il diapason il rapporto doppio;e il più perfetto, il diapason, è il rapporto quadruplo. In modo più evidente ancora l'astronomia raggiunge attraverso aritmetica l'investigia che la riguardano, non solo perché è posteriore alla geometria - poiché il moto viene naturalmente dopo il riposo - né perché i moti degli astri hanno un'armonia perfettamente melodiosa[2] , ma anche perché le levate, i tramonti, le progressioni, le retrogressioni, gli incrementi e ogni sorta di fasi sono governati da cicli e quantità numeriche. Abbiamo quindi giustamente intrapreso per prima la trattazione sistematica di questa, come scienza naturalmente anteriore, più onorevole e più venerabile, e, per così dire, madre e nutrice delle altre; e qui prenderemo le mosse per motivi di chiarezza.

## CAPITOLO VI

Tutto ciò che per natura, con metodo sistematico, è stato disposto nell'universo, sembra essere stato determinato e ordinato, in parte e nel suo insieme, secondo il numero, dalla preveggenza e dalla mente di colui che ha creato tutte le cose; Infatti, il modello è stato fissato, come uno schizzo preliminare, dal dominio del numero preesistente [4] nella mente del Dio creatore del mondo, numero solo concettuale e immateriale in ogni modo, ma allo stesso tempo la vera ed eterna essenza, in modo che con riferimento adesso, come a un piano artistico, siano state create tutte queste cose, il tempo, il moto, i cieli, gli astri, ogni sorta di rivoluzione.

È necessario, quindi, che il numero scientifico, essendo posto al di sopra di[2] cose come queste, sia costituito in modo armonioso, in accordo con se stesso; non da nessun altro, ma da se stesso. Tutto ciò che è costituito armoniosamente è composto da opposti [1] e, naturalmente, da cose reali; infatti, né le cose inesistenti possono essere messe in armonia, né le cose che esistono,ma si assomigliano l'una all'altra, né eppure le cose che sono diverse, ma non hanno alcuna relazione l'una con l'altra. Rimane, di conseguenza, che le cose di cui si fa un'armonia sono sia reali, sia diverse, sia con una qualche relazione reciproca.

4 Di tali cose, quindi, consiste numero scientifico; Perché le specie più fondamentali in esso sono due, comprendenti l'essenza della quantità,[1] [2] diverse l'una dall'altra e non di un genere completamente diverso, pari e dispari, e sono reciprocamente3 intessute in armonia l'una con l'altra, inseparabilmente e uniformemente, da una Natura meravigliosa e divina, come vedremo subito.

## CAPITOLO VII

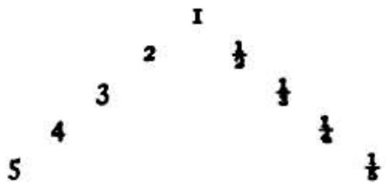
Il numero è una moltitudine limitata o una combinazione di unità o un flusso di quantità composto da unità; e la prima divisione del numero è pari e dispari. Il pari è quello che può essere diviso in due parti uguali senza che un'unità intervenga nel mezzo; e il dispari è quello che non può essere diviso in due parti uguali a causa del suddetto intervento di un'unità.

Ora questa è la definizione dopo l'ordinaria concezione; secondo la dottrina pitagorica, invece, il numero pari è quello che ammette la divisione nella parte più grande e in quella più piccola con la stessa operazione, la più grande in grandezza e la più piccola in quantità, in accordo con la naturale contrarietà [1] di questi due generi; e il bizzarro è quello che non permette di farlo, ma si divide in due parti disuguali.

In un altro modo ancora, secondo l'antica definizione, il pari è quello che può essere diviso in due parti uguali e in due disuguali tranne che la diade,[3] che è la sua forma elementare, non ammette che una sola divisione, quella in parti uguali; e in qualsiasi divisione mette in luce una sola specie di numero, comunque sia divisa, indipendentemente dall'altra. Il dispari [4] [5] è un numero che in qualsiasi divisione, che è necessariamente una divisione in parti disuguali, mostra entrambe le specie di numero insieme, mai senza mescolanza una con un'altra, ma sempre in compagnia di una altra.

Secondo la definizione in termini reciproci, il dispari è quello che differisce di un'unità dal pari in entrambe le direzioni, cioè verso il maggiore o il minore, e il pari è quello che differisce di un'unità in entrambe le direzioni dal dispari, cioè è maggiore di un'unità o minore di un'unità.

[1] Cioè, le metà sono le parti più grandi possibili di un termine in grandezza; e ce n'è un numero minore rispetto a qualsiasi altra parte frazionaria. Quindi una maggiore grandezza dei fattori è associata a un numero minore di essi; questa è la *naturale contrarietà ' di grandezza e quantità. Cfr. Boezio, I. 4, per una discussione di questa nozione, e Iamblico, p. 12, 3 ss. Pistclli. Questo principio può essere illustrato da quello che è stato chiamato "diagramma lambdoide" (cfr. Parte I, p. 127) per la sua somiglianza con la lambda greca, A. Questo diagramma presenta nella forma della lettera lambda, convergente all'unità, la serie dei numeri naturali e la serie elle frazioni, così:



e così via. Si noterà che i numeri interi e le frazioni corrispondenti mostrano le [4] contrarietà naturali * a cui si fa riferimento. Il diagramma compare nel commento di Iamblico (p.14,3 ss.Pistelli)dopo la discussione di queste definizioni, ed è citato in *Theol. Ariihp.* 3 (in basso) Ast.

* Quando un numero pari viene diviso in due parti, uguali o disuguali, queste parti sono sempre o entrambe dispari o entrambe pari ("una sola specie di numero", come dice Nicomaco). Iamblico, p. i2, 14 ss. Pistelli. Cfr. Heath, *Storia,* vol. I, p. 70.

[3] Iamblico (p. 13, 7 ss. Pistelli) nota che la monade si distingue da tutti i numeri dispari perché non ammette la divisione in parti disuguali, e la diade dai numeri pari perché ammette solo la divisione in parti uguali. Teone non nota questa proprietà della diade, ma discute a lungo la questione se la monade sia pari o dispari (p. 21, 24 ss. Hiller). Sulla dottrina di Nicomaco, secondo cui la monade e la diade sono entrambi elementi delnumero e non stessi numeri ma i suoi "inizi", si veda la Parte I, pp. 116 ss.

[4] Se un numero dispari viene diviso in due parti queste saranno sempre disuguali e una dispari, l'altra pari ([4] le due specie di numero ').

## CAPITOLO VIII

1 Ogni numero è contemporaneamente la metà della somma dei due che si trovano da una parte o dall'altra di esso[1] , e allo stesso modo la metà della somma di quelli che si trovano dopo di lui in entrambe le direzioni, e di quelli che si trovano dopo di loro, e così via fino a dove è possibile.

2 andare. L'unità da sola, non avendo due numeri ai lati, è la metà semplicemente del numero adiacente; quindi l'unità è la partenza naturale di ogni numero.

3 Per suddivisione dei tempi pari ,[2] si hanno i tempi pari, i tempi dispari pari e il pari-dispari. Il pari e il dispari sono opposti luno all'altro, come estremi, e il pari è comune a entrambi come un termine medio.

4 Ora, il numero pari [3] è un numero che è di per sé capace di essere diviso in due parti uguali,secondo le proprietà del suo genere,[4] e con ognuna delle sue parti analogamente divisibili, e ancora allo stesso modo ogni loro parte divisibile in due uguali fino a che la divisione delle successive suddivisioni non raggiunga l'unità naturalmente indivisibile. Prendiamo ad esempio 64; una metà di questo è 32, e di questo 16, e di questo la metà è8, e di questo4, e di questo2, e infine l'unità è la metà di quest'ultimo, e questo è naturalmente indivisibile e non ammette una metà.

5 È una proprietà dei pari che, qualsiasi parte si prenda, è sempre pari nella designazione e allo stesso tempo, per la quantità delle unità che la compongono, pari nel valore;

[1] Così 5 è la metà della somma di 4 + 6, 3 + 7, 2 + 8, ecc. Per un'applicazione tipicamente pitagorica di questo principio cfr. *Theol. Aritkp*. 28 s. Ast.

[1] Euclide, tra le definizioni di *Elem*., VII,definisce i numeri pari, pari,dispari e dispari (quest'ultimo è "uno che è misurato da un numero dispari un numero dispari di volte"). Nicomaco si limita a una divisione tripartita dei soli pari; la classificazione di Euclide si applica a tutti i numeri. Il "dispari-volte dispari" di Euclide non si trova affatto nell'*Introduzione* di Nicomaco, e nel definire le tre classi date sia da Nicomaco che da Euclide il primo usa formule un po' diverse, che sono coerentemente lodate da Iamblico nel suo commento. (Si vedano le note su I.
8. 7, sopra p. 127, e Nesselmann, p. 192). Teone (p. 25, 5 ss. Hiller) fornisce la stessa classificazione di Nicomaco e, come lui, si riferisce solo ai numeri pari. Le sue definizioni sono confrontate con quelle di Nicomaco nelle note seguenti. Si può notare che * dispari-tempi dispari' ricorre in Teone come altro nome per il numero primo (p. 23, 14 Hiller). Sulla classificazione dei numeri si veda Heath, *History*, vol. I, pp. 70 e segg.

[1] Teone diSmirne, p.25, 7 e segg. Hiller, dà la definizione di pari-dispari sostanzialmente come segue: È un numero che ha tre caratteristiche: (1) è prodotto dalla moltiplicazione di due numeri pari; (2) tutte le sue parti sono pari, fino all'unità; (3) nessuna delle sue parti ha la sua designazione in termini di numero dispari. La definizione di Euclide è la seguente: "Il numero pari è quello che è misurato da un numero pari un numero pari di volte"

[4] * Il suo genere ' è il pari; cfr. I. 7. 2. Così nota anche Filopono (ed. Hoche, p. 15).

e che nessuna di queste due cose parteciperà mai all'altra classe. Senza dubbio è per questo che si chiama pari, perché è essa stessa pari e ha sempre le sue parti,[2] e le parti delle sue parti fino all'unità, pari sia nel nome che nel valore; in altre parole, ogni parte che ha è pari nel nome e pari nel valore. [3]

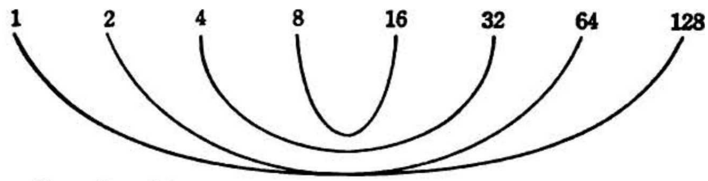
Esiste un metodo per produrre i tempi pari, in modo che nessuno sfugga, ma tutti successivamente cadano sotto di esso, se si fa come segue:

Se si procede dall'unità, come da una radice, per mezzo del doppio rapporto, fino all'infinito, tutti i termini saranno pari-dispari, ed è impossibile trovarne altri oltre a questi; ad esempio, i, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

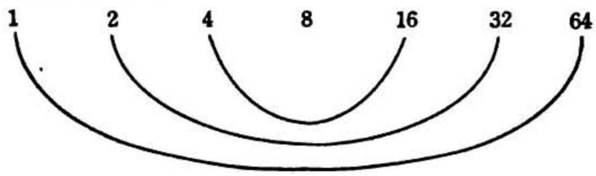
Ora, ogni numero che è stato prodotto dal doppio rapporto,a partire dal'unità,   ed è in tutto e per tutto pari, e ogni parte[2] che si trova ad avere è sempre chiamata da

[2]Boezio,.9:*Illud autem non minima consideratione dignum est, quod eius omnis pars oh una parte quacumque} quae intra ipsum numerum est, denominatur tantamque summam quantitatis indudit quota pars est alter numerus pariter Paris iUiust qui eum continel1 quantitatis. Itaque fit, ut sibi partes ipsae respondcant, ut quota pars una est, tantam habeat altera quantitatemy et quota pars ista est, tatiiam in priore summa necesse sit multitudinis inveniri.*

Questa corrispondenza di fattori è così rappresentata graficamente in uno dei MSS:




**and with an odd number of terms:**



uno dei numeri che lo precedono nella serie[1] , e la somma delle unità di questa parte è la stessa di uno dei numeri che la precedono, in un sistema di corrispondenza reciproca, appunto, e di interscambio. Se c'è un numero pari di termini del doppio rapporto a partire dall'unità, non si può trovare un termine medio, ma sempre due, a partire dai quali la corrispondenza e l'interscambio di fattori e valori, valori e fattori, procederà in ordine, passando prima ai due ai lati del medio, poi ai successivi ai lati, fino ad arrivare ai termini estremi, in modo che l'insieme corrisponda in valore all'unità e l'unità all'insieme. Per esempio, se fissiamo 128 come termine maggiore, il numero dei termini sarà pari, perché ce ne sono otto in tutto fino a questo numero; e non avranno un termine medio, perché questo è impossibile con un numero pari, ma necessariamente due, 8 e 16. Questi corrisponderanno l'uno come fattori; perché dell'intero, 128, 16 è un ottavo e viceversa 8 è un sedicesimo. Quindi, procedendo in entrambe le direzioni, troviamo che 32 è un quarto, e 4 un trentaduesimo, e ancora 64 è una metà, e 2 un sessantaquattresimo, e infine agli estremi unità è un centoventottesimo, e viceversa 128 è il tutto, per corrispondere all'unità.

Se, tuttavia, la serie è composta da un numero dispari di termini, sette 11 per esempio, e noi trattiamo 64, ci sarà necessariamente un termine medio in accordo con la natura di dispari; [2] il termine medio corrisponderà a se stesso perché non ha partner; e quelli che si trovano da una parte e dall'altra corrisponderanno a loro volta tra loro fino a che questa corrispondenza terminerà agli estremi.

L'unità, ad esempio, sarà un sessantaquattresimo, e 64 l'intero, corrispondente all'unità; 32 è una metà, e 2 un trentaduesimo; 16 è un quarto, e 4 un sedicesimo; e 8 l'ottava parte, senza che vi corrisponda altro.

La proprietà di tutti questi termini, quando vengono sommati tra loro, è quella di essere uguali al successivo della serie, mancando di un'unità, quindi che necessariamente la loro somma in qualsiasi modo sarà un numero dispari,[1] per quello che non riesce per un'unità ad essere uguale ad un numero pari è dispari. Questa osservazione ci sarà utile tra breve nella costruzione dei numeri perfetti. Ma per fare un esempio, i termini dell'unità che precedono il 256 nella serie, quando si sommano insieme, sono entro 1 da eguagliando 256, e tutti termini prima di 128, il termine immediatamente precedente, sono similmente uguali a 128 salvo una unità; e ai termini successivi le somme di quelli che li seguono sono correlate in modo analogo. Così l'unità stessa si trova a una sola unità di distanza dal termine successivo, che è 2, e questi due termini insieme non riescono ad eguagliare di 1 il successivo, e i tre insieme sono entro 1 del successivo in ordine, e tu troverai che che questo va avanti senza interruzione all'infinito. Anche questo è molto utile ricordarlo: Se il numero dei termini della serie pari trattata è pari, il prodotto degli estremi sarà sempre uguale al prodotto delle medie; se c'è un numero dispari di termini, il prodotto degli estremi sarà uguale al quadrato della media.

Infatti, nel caso di un numero pari di termini, 1 per 128 è uguale a 8 per 16 e poi a 2 per 64 e ancora a 4 per 32, e questo in ogni caso; e con un numero dispari di termini, 1 per 64 è uguale a 2 per 32, e questo è uguale a 4 per16, e questo è uguale a 8 per8, il solo termine medio moltiplicato per se stesso.

## CAPITOLO IX

1 Il numero pari-dispari [4] è un numero che per il suo genere è di per sé pari, ma è specificamente5 opposto al suddetto pari-dispari. Si tratta di un numero che, pur ammettendo la divisione in due parti uguali metà, secondo la moda del genere comune ad esso e il pari, le metà non sono immediatamente divisibili in due uguali, per esempio 6, 10, 14, 18, 22, 26 e simili; perché dopo che queste sono state divise le loro metà si trovano indivisibili.

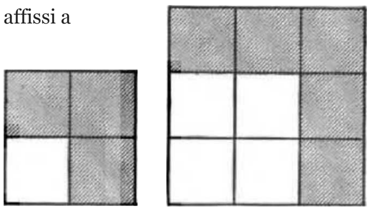
È proprietà del pari-dispari che qualsiasi fattore si scopra avere è opposto nel nome al suo valore, [1] e che la quantità di ogni parte è opposta nel valore al suo nome, e che il valore numerico della sua parte non è mai in alcun modo dello stesso genere del suo nome. [2] Per fare un solo esempio, il numero 18, la sua metà, con un nome pari, è 9, di valore dispari; la sua terza parte, sempre con una denominazione dispari, è 6, di valore pari; viceversa, la sesta parte è 3 e la nona parte 2; e in altri numeri si troverà la stessa particolarità.

È forse per questo motivo che ha ricevuto questo nome, cioè perché, pur essendo pari, le sue metà sono allo stesso tempo dispari.

Questo numero si ottiene dalla serie che inizia con l'unità, con4 con una differenza di 2, cioè i numeri dispari, disposti nell'ordine desiderato e poi moltiplicati per 2. I numeri prodotti sarebbero, nell'ordine, questi: 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, e così via, fino a quando si vuole procedere. I termini maggiori differiscono sempre di 4 dai successivi minori, il motivo è che le loro forme di base originarie, i numeri dispari, si superano un l'altro di 2 e sono stati moltiplicati per 2 per formare questa serie, e 2 per 2 fa 4.

Di conseguenza, nella serie dei numeri naturali i numeri pari e dispari 5

[2] *γνωμονες*: Questo termine è frequentemente usato in aritmetica in riferimento ai numeri dispari che sono sommati tra loro per formare la serie dei numeri quadrati, perché quando sono rappresentati graficamente possono essere successivamente affissi a la figura precedente nella forma caratteristica di Lo gnomone (vedi la figura).



Nicomaco,tuttavia, utilizza il termine anche in riferimento a qualsiasi insieme o serie di numeriche possono essere aggiunti successivamente per formare un secondo insieme o serie. Così gli gnomoni di i numeri esagonali sono i termini della serie naturale da 1 con una differenza comune di 4. (Cfr. II. n, 1 e segg. e II. 13.6.) Troviamo anche la parola usata in questo senso più ampio da Teone di Smirne ( p. 37, n Hiller) e da Erone di Alessandria *(Def.* 59, p. 21 Hultsch). Per una discussione sull'origine e sull'uso del termine si veda Cantor, *op. cit.*9 vol. I, pp.161 ss.

si troveranno i numeri quinti a l'uno dall'altro, che si superano per una differenza di 4, che passano su tre termini e che sono prodotti dalla moltiplicazione dei numeri dispari per 2.
6 Si dice che sono opposti nelle proprietà [2] ai tempi pari, perché
di questi il solo termine estremo più grande è divisibile, mentre di questi primi solo il più piccolo si è dimostrato indivisibile; e in particolare perché nel primo caso la disposizione reciproca delle parti [3] dagli estremi al termine o ai termini medi fa sì che il prodotto dei primi sia uguale al quadrato o al prodotto dei secondi; ma in questo caso, per la stessa corrispondenza e confronto, il termine medio è la metà della somma degli estremi, [4] o se ci sono due medie, la loro somma è uguale a quella dei due estremi.

## CAPITOLO X

1 Il numero pari-dispari è quello che mostra la terza forma del pari, appartenendo in comune a entrambe le specie precedentemente menzionate come un'unica media tra due estremi, poiché per un aspetto assomiglia al pari-dispari e per un altro al dispari-dispari, e quella proprietà per cui varia dall'uno condivide con l'altro, e per quella proprietà che condivide con l'uno si differenzia dall'altro.
Il numero pari-dispari [B] è un numero pari che può essere diviso in due parti uguali, le cui parti possono essere anch'esse divise, e talvolta anche le parti delle sue parti, ma non può portare la divisione delle sue parti fino all'unità. Tali numeri sono 24, 28, 40; perché ognuno di essi ha la sua metà e la metà della sua metà, e a volte se ne trova uno che permette di portare la divisione della metà ancora più lontano tra le sue parti. Non c'è però nessuno che abbia le sue parti divisibili a metà quanto l'unità naturalmente indivisibile.
Ora, ammettendo più di una divisione, il pari-dispari è 3 come il pari-dispari e non come il dispari-dispari; ma in quanto la sua suddivisione non termina mai con l'unità, è come il pari-dispari e non come il pari-dispari. Solo essa possiede allo stesso tempo le qualità proprie di ciascuna delle due precedenti,[1] e poi ancora proprietà che non appartengono a nessuno dei due; infatti uno aveva solo il termine più alto divisibile, e l'altro solo il più piccolo indivisibile,ma questo nessuno dei due; perché si osserva che ha più divisioni di uno nel termine maggiore, e più di uno indivisibile nel minore. Inoltre, in esso vi sono alcune parti il cui nome non è opposto ai loro valori né di genere opposto, [2] alla maniera del pari-dispari; e vi sono anche sempre altre parti di nome opposto e contrario in natura ai loro valori, alla maniera del pari-dispari. Per esempio, in 24, ci sono parti non opposte nel nome ai loro valori, la quarta parte, 6, la metà, 12, la sesta, 4, e la dodicesima, 2; ma la terza parte, 8, l'ottava, 3, e la ventiquattresima, 1, sono opposte; e così è per il resto. Questo numero è prodotto da un metodo un po' complicato, e mostra, in un certo senso, anche nel suo modo di produzione, che è un miscuglio di entrambi gli altri tipi. Infatti, mentre il pari è fatto con i numeri pari, i doppi dall'unità all'infinito, e il dispari con i dispari dal 3 in poi, fino all'infinito, questo deve essere tessuto insieme da entrambe le classi, in quanto comune a entrambi.

7 Esponiamo quindi i numeri dispari a partire da 3 in ordine sparso in un'unica serie: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, - - - e i tempi pari, a partire da 4, di nuovo uno dopo l'altro in una seconda serie secondo il loro ordine: 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, . . . per quanto si vuole. Ora moltiplicate per il primo numero di una delle due serie - non fa differenza quale - dall'inizio e in ordine tutti quelli della serie rimanente e annotate i numeri risultanti; poi moltiplicate di nuovo per il secondo numero della stessa serie gli stessi numeri ancora una volta, per quanto potete, e annotate i risultati; poi con il terzo numero moltiplicate di nuovo gli stessi termini, e per quanto vi spingiate oltre non otterrete altro che i numeri pari-dispari.

8 A titolo illustrativo utilizziamo il primo termine della serie dei numeri dispari e moltiplichiamo per esso tutti i termini della seconda serie in ordine,così: 3 X 4, 3X 8, 3X 1 6, 3 X3 2 , e così via all'infinito. I risultati saranno 12, 24, 48, 96, che dobbiamo annotare in una riga. Poi, ricominciando da capo, fate la stessa cosa con il secondo numero: 5 X 4, 5 X 8, 5 X 16, 5 X 32. I risultati saranno 20, 40, 80, 160. Poi fate la stessa cosa ancora una volta con 7, il terzo numero, 7 X 4, 7 X8 , 7 X 16,7 X 32. I risultati sono 28, 56, 112, 224; e allo stesso modo, fin dove si vuole arrivare, si otterranno risultati simili.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri dispari | | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| Pari-dispari | | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| Numeri pari e dispari | Ampiezza | 16<br>20<br>28<br>36<br>44 | 24<br>40<br>56<br>72<br>88 | 48<br>80<br>112<br>144<br>176 | 96<br>160<br>224<br>288<br>352 | 192<br>320<br>448<br>576<br>704 | 384<br>640<br>896<br>1152<br>1408 | 768<br>1280<br>1792<br>2304<br>2816 |
| | | Lunghezza | | | | | | |

9 Ora, quando si dispongono i prodotti della moltiplicazione per ogni termine nella sua riga appropriata, rendendo le linee parallele, in modo meraviglioso apparirà lungo l'ampiezza della tabella la proprietà peculiare dei pari-dispari, che il termine medio è sempre la metà della somma degli estremi, se c'è una media, e la somma dei mezzi è uguale alla somma degli estremi se due.

Ma lungo la lunghezza della tabella apparirà la proprietà dei tempi pari, poiché il prodotto degli estremi è uguale al quadrato media, se c'è un termine medio, o il loro prodotto,se ce ne sono due. Quindi questa specie ha le proprietà peculiari di entrambe, perché è una miscela naturale di entrambe.

## CAPITOLO XI

Ancora, mentre il dispari è distinto sopra contro il pari nella classificazione e non ha nulla in comune con esso, poiché quest'ultimo è divisibile in metà uguali e il primo non è così divisibile, tuttavia si trovano tre specie di dispari, [1] che differiscono l'una dall'altra, di cui la prima è chiamata prima e incomposita,[2] quella che è la prima e la seconda.

[1] Su questa classificazione c'è grande disaccordo tra le autorità antiche. In primo luogo, Nicomaco limita queste specie ai numeri dispari,assicurando così una triplice classificazione per bilanciare quella dei numeri pari (vedi sopra). Lo segue Iamblico (p. 26, 18), ma Euclide (*Elem.*, VII, *Defl.,* 11-14) e Teone (p. 23, 6 ss. Hiller) ne fanno una classificazione sia dei pari che dei dispari. Nicomaco divide poi in ((7) primo e incomposto; (6) secondario e composito; (c) ciò che è assolutamente composito ma relativamente primo. Nessel-mann,*op. cit.,* p. 194, fa notare che queste due ultime classi non si escludono a vicenda, poiché ft include *c*. La difficoltà viene superata da Iamblico, che classifica così: (a) l'assolutamente primo, che a priori è anche relativamente primo; (A) l'assolutamente secondario, che include come sottoclassi il relativamente primo e il relativamente secondario; ledue sottoclassi dipendono dall'associazione di termini in specifiche istanze. Euclide(*loc. cit.)* dà le definizioni di primi, primi relativi, numeri composti e relativamente composti. Ciò non implica una classificazione rigorosa in questo senso. Teone, tuttavia,sembra intenderla come tale e stabilire la sua classificazione secondo questo modello, facendo coincidere le sue definizioni con quelle di Euclide: (a) assolutamente primi; (ft) relativamente primi; (c) assolutamente composti; (*d*) relativamente composti. 'ultima classe non corrisponde a nessuna definizione di Nicomaco; consiste di numeri come l'8 e il 9 presi in connessione con il 6. Cfr. T. L. Heath su Euclide, *loc. cit.* per un'ampia discussione; anche la sua *Storia,* vol. I, pp. 72 ss.

[2] Euclide definisce un numero primo come "un numero misurato dalla sola unità" VII, *Dcf.* n. Il numero 2 soddisfa la sua definizione ed è chiamato primo anche da Aristotele (*Top.*, VIII. 2. 157 a 39). Ma per Nicomaco i numeri primi sono una classe di numeri *dispari*, non di numeri in generale. Si veda a questo proposito Heath, *Euclide*, II, 284-85. Teone di Smirne (p. 23, 9 Hiller) definisce il numero "assolutamente primo e incomposto" come un numero "non misurato da alcun numero, ma solo dall'unità". Egli afferma che questi numeri sono stati talvolta chiamati "lineari"e "rettilinei" perché le lunghezze e le linee sono viste in una dimensione", e che sono anche chiamati "dispari-tempi dispari". Teone lascia vago se considera la diade come prima; infatti,dopo aver affermato che i numeri pari non sono primi perché si misurano con altri numeri che non siano la sola unità, dice che la diade è un'eccezione ed è perciò chiamato "strano".

In contrapposizione a esso il secondario e il composito, e quello che si trova a metà strada tra entrambi e che è visto come una media tra gli estremi, cioè la varietà che, di per sé, è secondaria e composita, ma relativamente è prima e incomposita.

2 La prima specie, quella dei primi e degli incompositi, si trova ogni volta che un numero dispari non ammette altro fattore se non quello che ha come denominatore il numero stesso, [1] che è sempre l'unità; per esempio, 3, 5, 7, n, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Nessuno di questi numeri avrà per caso una parte frazionaria con un denominatore diverso dal numero stesso, ma solo quella che ha questo come denominatore, e questa parte sarà in ogni caso l'unità; Infatti il 3 ha solo una terza parte, che ha lo stesso denominatore del numero ed è di corso unità, 5 una quinta, 7 una settima, e 11 solo una undicesima parte, e in tutti questi casi queste parti sono unità.

3 Ha ricevuto questo nome perché può essere misurata solo in base al numero che è primo e comune a tutti, l'unità, e da nessun altro; inoltre, perché non è prodotto da nessun altro numero combinato con se stesso se non la sola unità; perché il 5 è 5 X 1, e il 7 è 7 X 1, e gli altri secondo la loro quantità. Si possono produrre altri numeri, che hanno origine da essi come da una fonte e da una radice, per cui sono chiamati"primi", perché esistono prima come inizi degli altri. Infatti ogni origine [2] è elementare e incomposita, in cui tutto si risolve e da cui tutto è costituito, ma l'origine stessa non può essere risolta in nulla o costituita da qualcosa.

## CAPITOLO XII

1 Il numero [3], secondario e composito, è un numero dispari, perché si distingue come membro di questa stessa classe, ma non ha qualità elementare, poiché trae origine dalla combinazione di qualcos'altro.

[1] Come nel caso di 3.

* Cfr. la discussione sull'elemento , II. 1.

[1] Nicomaco non ammette i numeri pari nella classe dei composti, senza dubbio perché ha già esaurito la loro classificazione. Teone di Smirne, invece, fa del composito una divisione del numero in generale e riporta i numeri pari tra i suoi esempi. Come si è detto, egli distingue i"numeri composti assoluti che possono essere misurati da alcuni numeri più piccoli e i"composti relativi", quelli che sono misurati da una qualche misura, ma che sono primi tra loro, come 8, 6, 9, con le misure 2 e 3. A questo proposito l'1 non è considerato una misura comune, perché, come egli afferma, non è esso stesso un numero, ma l'inizio del numero. Euclide, *Elementi,* VII, *Def.* 14, definisce un numero composto come "un numero misurato da qualche numero * .

Per questo motivo è caratteristico del numero secondario avere, oltre alla parte frazionaria con il numero stesso come denominatore, un'altra o più parti con denominatori diversi, la prima sempre, come in tutti i casi, unitaria, la seconda mai unitaria, ma sempre o quel numero o quei numeri dalla cui combinazione è stato prodotto. esempio, 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39; ognuno di questi è misurato dall'unità, come lo sono altri numeri e come loro ha una parte frazionaria con lo stesso denominatore del numero stesso, per la natura della classe comune a tutti; ma per eccezione e in modo più particolare impiegano anche una parte, o più parti, con un denominatore diverso; 9, oltre alla nona parte, ha anche una terza parte; 15 una terza e una quinta oltre alla quindicesima; 21 una settima e una terza oltre alla ventunesima, e 25, oltre alla venticinquesima, che ha come un denominatore 25 stesso, anche una quinta, con un denominatore diverso.

Si chiama secondario, quindi, perché può impiegare un'altra misura.
insieme all'unità, e perché non è elementare, ma è prodotto da qualche altro numero combinato con se stesso o con qualcos'altro; nel caso di 9, 3
Nel caso di 15, 5 o, per Zeus, 3; e quelli successivi nello stesso modo. Eesso è chiamato composito per questa, o qualche ragione:che può essere risolto in quei numeri dai quali è stato fatto, poiché può anche essere misurato da essi. Infatti, nulla di ciò che può essere scomposto è incomposto, ma in ogni caso composito.

## CAPITOLO XIII

Ora, mentre queste due specie di dispari si oppongono l'una all'altra, tra esse ne viene concepita una terza, che deriva, per così dire, la sua forma specifica da entrambe, cioè il numero che è in sé secondario e composito, ma relativamente a un altro numero è primo e incomposto. Esiste quando un numero, oltre alla comune misura, unità, è misurato da qualche altro numero e è quindi in grado di ammettere una o più parti frazionarie, con denominatore diverso dal numero stesso, oltre a quella con se stesso come denominatore.

[1] Ovvero i primi.

* Teone di Smirne ha questa classe, che egli chiama 1 primi tra loro e non assolutamente primi/ e fa notare che 8, 9 e 10 sono primi rispetto ai 4 primi assoluti". Euclide definisce i numeri relativamente primi come 4 quelli che sono misurati solo dall'unità come misura comune" , *Elementi*, VII, *Def.* 13.

Se lo si confronta con un altro numero di proprietà simili, scopre che non può essere misurato con una misura comune all'altro, né ha una parte frazionaria con lo stesso denominatore di quelle dell'altro. A titolo illustrativo, si confronti il 9 con il 25.

Ciascuno di per sé è secondario e composito, ma relativamente l'uno all'altro hanno solo l'unità come misura comune, e nessun fattore in essi ha lo stesso denominatore, poiché la terza parte del primo non esiste nel secondo né la quinta parte del secondo si trova nel primo.

2 La produzione di questi numeri è chiamata da Eratostene "setaccio", perché prendiamo i numeri dispari mescolati insieme e indistintamente e da essi con questo metodo di produzione separiamo, come da una specie di strumento o setaccio, i primi e gli incomposti da loro stessi, e i secondari e i composti da loro stessi, e troviamo la classe mista da soli.

3 Il metodo del "setaccio" è il seguente. Dispongo tutti i numeri dispari in ordine, a partire dal 3, in una serie più lunga possibile, e poi a partire dal primo osservo quali può misurare,e trovo che può misurare i termini a due posti di distanza, per quanto ci interessa procedere. E trovo che misura non come si china e a caso,ma che misurerà il primo, cioè quello a due posti di distanza, con la quantità di quello che sta al primo posto nella serie, cioè con la sua stessa quantità, perché lo misura 3 volte; e quello a due posti da questo dalla quantità del secondo in ordine, perché questo misurerà 5 volte; e ancora quello due posti più in là dalla quantità del terzo in ordine, o 7 volte, e quello due posti ancora più in là dalla quantità del quarto in ordine, o 9 volte, e così *all'infinito* nello stesso modo.

*4* Poi ricomincio da capo e osservo cosa può misurare, e scopro che misura tutti i termini a distanza di quattro posti, il primo per la quantità del primo in ordine, ovvero 3 volte; il secondo per quella del secondo, ovvero 5 volte; il terzo per quella del terzo, ovvero 7 volte; e in quest'ordine *all'infinito*.

5 Ancora, come prima, il terzo termine7, assumendo la funzione di misura, misurerà termini distanti sei posti, e il primo dalla quantità di 3, il primo della serie ,il secondo da quella di5, perché questo è il secondo numero, e il terzo da quella di 7, perché questo ha la terza posizione nella serie.

6 E, analogamente, questo processo continuerà senza che si verifichi un'interruzione.

terminazione, in modo che i numeri [1] si succedano alla funzione di misura in base alla loro posizione fissa nella serie; l'intervallo che separa i termini misurati è determinato dall'avanzamento ordinato dei numeri pari da 2 all'infinito, o dal raddoppio della posizione nella serie occupata dal termine di misura, e il numero di volte in cui un termine viene misurato è fissato dall'avanzamento ordinato dei numeri dispari in serie da 3.

Se si contrassegnano i numeri con determinati segni, si scoprirà che 7 i termini che si succedono nella funzione di misurazione non misurano tutti lo stesso numero - e a volte nemmeno due misureranno lo stesso numero - né tutti i numeri indicati si sottopongono a una misura, ma alcuni del tutto evitano di essere misurati da qualsiasi numero, alcuni sono misurati da uno solo, altri da due o anche più.

Ora questi che sono non misurati a 8 tutti, ma evitano esso, sono primi e incomposti, setacciati per così dire da un setaccio; quelli misurati da una sola misura secondo la sua stessa quantità 2 avranno solo una parte frazionaria con denominatore diverso dal numero stesso, oltre parte con lo stesso denominatore; e quelli che sono misurati da una sola misura, ma secondo la quantità di qualche altro numero diverso dalla misura e non il proprio, o sono misurati da due misure nello stesso momento, avranno diverseparti frazionarie 3 con altri denominatori oltre a quello con lo stesso del numero stesso; questi saranno secondari e compositi.

La terza divisione [4], quella comune a entrambe le prime, che è 9 di per sé secondaria e composita ma primaria e incomposita rispetto ad un'altra, consisterà nei numeri prodotti quando un qualche numero primo e incomposto li misura in base alla sua propria quantità, se uno così prodotto viene confrontato con un altro di origine simile. Per esempio, se 9, che è stato prodotto da 3 misurando la sua stessa quantità, perché è 3 volte3, viene confrontato con25, che è stato prodotto da 5 misurando la sua stessa quantità, perché è 5 volte5, questi numeri non hanno una misura comune se non l'unità.

10 Ora indagheremo su come si possa avere un metodo per discernere se i numeri sono primi e incomposti, o secondari e composti, relativamente l'uno all'altro, poiché dei primi l'unità è la misura comune, ma dei secondi qualche altro numero oltre all'unità; e quale sia questo numero.

Supponiamo che ci vengano dati due numeri dispari e che qualcuno ci ponga il problema e ci indirizzi a determinare se essi sono primi e incompositi l'uno rispetto all'altro o secondari e compositi, e se sono secondari e compositi quale numero è la loro misura comune. Dobbiamo confrontare i numeri dati e sottrarre il più piccolo dal più grande il maggior numero di volte possibile; poi, dopo questa sottrazione, sottrarre a sua volta dall'altro, il maggior numero di volte possibile; poiché questo cambiamento e sottrazione dall'uno e dall'altro a turno terminerà necessariamente o con l'unità o con un numero unico e uguale che sarà necessariamente dispari. Ora, quando le sottrazioni terminano con l'unità, mostrano che i numeri sono primi e incompositi l'uno rispetto all'altro; e quando terminano con qualche altro numero, dispari in quantità e prodotto due volte,[2] allora dicono che sono secondari e compositi l'uno rispetto all'altro, e che la loro misura comune è proprio quel numero che compare due volte.

Ad esempio, se i numeri dati sono 23 e 45, sottraendo 23 da 45, il resto sarà 22; sottraendo questo da 23, il resto è 1, sottraendo questo da 22 il maggior numero di volte possibile si ottiene l'unità. Quindi sono primi e incomposti tra loro e l'unità, che è il resto, è la loro misura comune.

11 Ma se si dovessero proporre altri numeri, 21 e 49 ,si sottragga il più piccolo dal più grande e 28 è il resto. Poi di nuovo io sottraggo lo stesso 21 da questo, perché si può fare, e il resto è 7. Questo lo sottraggo a sua volta da 21 e rimane 14; da questo sottraggo di nuovo 7, perché è possibile, e rimane 7. Ma non è possibile sottrarre 7 da 7; quindi si è concluso il processo con un 7 ripetuto e si può dichiarare che i numeri originali 21 e 49 sono secondari e compositi l'uno rispetto all'altro. Ma non è possibile sottrarre 7 da 7; quindi il processo si è concluso con un 7 ripetuto, e si possono dichiarare i numeri originali 21 e 49 secondari e compositi rispetto all'altro, e7la loro misura comune oltre all'unità universale.

## CAPITOLO XIV

Per ricominciare di nuovo, dei numeri semplici pari alcuni sono sovrabbondanti,carenti, come estremi contrapposti,e alcuni sono intermedi tra loro e sono chiamati perfetti. Quelli che si dicono opposti l'uno all'altro, il sovrabbondante e il carente, si distinguono l'uno dall'altro in base alla relazione di disuguaglianza [1] nelle direzioni del maggiore e del minore; infatti, al di fuori di questi non si potrebbe concepire nessun'altra forma di disuguaglianza, né il male, [2] la malattia, la sproporzione, la sconvenienza o qualsiasi altra cosa del genere, se non in termini di eccesso o di carenza. Infatti, nel regno di quello più grande [3] si verificano eccessi, sopraffazione, e sovrabbondanza, e in quello meno necessario, carenza, privazione e mancanza; Ma in quello che si trova tra il maggiore e il minore, cioè l' uguale, si trovano le virtù, la ricchezza, la moderazione, la correttezza, la bellezza e le cose simili, alle quali la suddetta forma di numero, il perfetto, è più affine.

Ora, il numero sovrabbondante4 è quello che ha, oltre ai 3 fattori che gli appartengono e che ricadono sulla sua parte, altri in aggiunta, proprio come se un animale fosse creato con troppe parti o arti,

[1] Nicomaco si riferisce qui alla relazione generale di disuguaglianza che si oppone all'uguaglianza (I. 17. 2) come una delle divisioni primarie del numero relativo. Tecnicamente l'uguaglianza e la disuguaglianzaarc 'relazioni',il termine si applica qui alla disuguaglianza come all'uguaglianza in I. 17. 4; sottointende la disuguaglianza. 4; sub-classi dell'ineguale, prima il maggiore e il minore (cfr. I. 17. 6) e poi i rapporti specifici sono anche chiamate * relazioni

* Secondo Aristotele la virtù è la media e il vizio è l'eccesso o la carenza. Cfr. *Eth. Nic* II. 6. 1106 b 33. Queste sono solo le varietà che Nicomaco assegna alle disuguaglianze.

con dieci lingue, come dice il poeta, e dieci bocche, o con nove labbra, o tre file di denti, o cento mani, o troppe dita di una mano.

Allo stesso modo se, quando tutti i fattori di un numero vengono esaminati e sommati in una somma, risulta che i fattori del numero stesso superano il numero stesso, questo viene chiamato numero sovrabbondante, perché supera la simmetria che esiste tra il perfetto e le sue parti. Tali sono il 12, il 24 e alcuni altri, poiché il 12 ha una metà, 6, un terzo, 4, un quarto, 3, un sesto, 2, e un dodicesimo, 1,che sommati fanno 16, che è più del 12 originale; le sue 4 parti, quindi, sono maggiori del tutto.

E 24 ha una metà, un terzo, un quarto, un sesto, un ottavo, un dodicesimo e un ventiquattresimo, che sono 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1. Sommati insieme fanno 36, che, rispetto al numero originale, 24, si scopre essere più grande di esso, anche se composto unicamente dai suoi fattori. Anche in questo caso, quindi, le parti sono in eccesso rispetto tutto. [2]

## CAPITOLO XV

Il numero mancante [3] è quello che ha qualità opposte a quelle indicate e i cui fattori sommati sono inferiori al numero stesso. come se ad un animale mancasse un numero naturale di arti o parti, o come se un uomo avesse un solo occhio, come nella poesia: "E un solo globo rotondo era fissato nella sua fronte"; [4] o come se uno fosse monco, o avesse meno di cinque dita su una mano, o mancasse di lingua, o qualche altro membro del genere. Tale persona sarebbe chiamata deficiente e, per così dire, mutilata, secondo il modo peculiare dei numeri i cui fattori sono inferiori a se stessi, come l'8 o il 14. Infatti, l'8 ha i fattori metà, quarto e quarto. Infatti, l'8 ha i fattori metà, quarto e ottavo, che sono 4, 2 e 1, e sommati fanno 7, e meno del numero originale. Le parti, quindi, non sono in grado di formare il numero intero. Ancora, 14 ha una metà, un settimo, un quattordicesimo, 7, 2 e 1, rispettivamente; e tutti insieme fanno 10, meno del numero originale. Quindi anche questo numero è carente nelle sue parti, rispetto alla composizione del tutto con esse.

## CAPITOLO XVI

Mentre queste due varietà si oppongono alla maniera degli estremi, 1 il cosiddetto numero perfetto [1] appare come un medio, che si scopre essere nel regno dell'uguaglianza, e non rende le sue parti maggiori di sé, sommate, né si mostra maggiore delle sue parti, ma è sempre uguale alle sue parti. Infatti,l'uguale è sempre concepito come a metà strada tra maggiore e minore, e è, come esso era, moderazione tra l'eccesso e la carenza, e ciò che è intonato, tra le altezze troppo alte e troppo basse.

Ora, quando un numero, confrontando con se stesso la somma e la combinazione di tutti i fattori di cui ammette la presenza, non li supera in quantità né è superato da essi, allora tale numero è propriamente detto perfetto, come un numero che è uguale alle sue parti. Tali numeri sono 6 e 28; infatti, il 6 ha i fattori metà, terzo e sesto, rispettivamente 3, 2 e 1, che sommati formano il 6 e sono uguali al numero originale né più né meno. Il 28 ha i fattori metà, quarto, settimo, quattordicesimo e ventottesimo, che sono 14, 7, 4, 2 e 1; questi sommati insieme fanno 28, e quindi né le parti sono maggiori del tutto né il tutto maggiore delle parti, mail loro confronto è inuguaglianza, che qualità peculiare del numero perfetto. E così come le cose giuste ed eccellenti sono poche e facilmente enumerabili, mentre quelle brutte e quelle cattive sono diffuse, così anche i numeri sovrabbondanti e quelli carenti si trovano in grande moltitudine e disposti in modo irregolare - poiché il metodo della loro scoperta è irregolare - ma i numeri perfetti sono facilmente enumerabili e disposti con ordine adeguato; infatti se ne trova uno solo tra le unità, 6, un altro solo tra le decine, 28, e un terzo nel rango delle centinaia, 496 solo, e un quarto entro i limiti delle migliaia, cioè sotto i diecimila, 8.128.[2] E sono loro che accompagnano la caratteristica 1 di terminare alternativamente in 6 o 8, e di essere sempre pari.

[1] Definizione di Euclide, *Elem.*, VII. 2 2, è: "Un numero perfetto è un numero che è uguale alle sue parti". Analogamente lo definisce Teone di Smirne, p. 45, 10. Cfr. Heath, *Storia*, vol. I, p. 74.

[2] Le indagini successive hanno determinato altri sette numeri perfetti. T. L. Heath, *His-tory* vol. I, pp. 74-75, e L. E. Dickson, *op. cit.*, vol. I, capitolo I.

I. $2(2^2 - 1) = 6.$
II. $2^2(2^3 - 1) = 28.$
III. $2^4(2^5 - 1) = 496.$
IV. $2^6(2^7 - 1) = 8{,}128.$
V. $2^{12}(2^{13} - 1) = 33{,}550{,}336.$
VI. $2^{16}(2^{17} - 1) = 8{,}568{,}910{,}416.$
VII. $2^{18}(2^{19} - 1).$
VIII. $2^{30}(2^{31} - 1).$
IX. $2^{60}(2^{61} - 1)$, with 37 digits.
X. $2^{88}(2^{89} - 1).$
XI. $2^{126}(2^{127} - 1).$

Teone, nella sua nota sui numeri perfetti, cita solo il 6 e l'8.

4 C'è un metodo per produrli, preciso e infallibile, che non passa per uno qualsiasi dei numeri perfetti e non riesce a distinguere quelli che non lo sono, il che si effettua nel modo seguente.

Dovete esporre i numeri pari a partire dall'unità, avanzando in ordine su una riga, a vostro piacimento: i, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1.024, 2.048, 4.096. . . . Poi dovete sommarli, uno alla volta, e ogni volta che fate una somma osservate il risultato per vedere qual è. Se scoprite che si tratta di un numero primo e incomposto, moltiplicatelo per la quantità dell'ultimo numero aggiunto e il risultato sarà sempre un numero perfetto.
Se però il risultato è secondario e composto, non moltiplicatelo, ma aggiungete il successivo e osservate di nuovo qual è il numero risultante; se è secondario e composto, passate di nuovo oltre e non moltiplicate, ma aggiungete il successivo; se invece è primo e incomposto, moltiplicatelo per l'ultimo termine aggiunto e il risultato sarà un numero perfetto; e così via all'infinito. In modo analogo si otterranno tutti i numeri perfetti in successione, senza trascurare nessuno. Per esempio, a 1 aggiungo 2, osservo la somma e trovo che è 3, un numero primo e in composto in accordo con le nostre precedenti dimostrazioni; perché non ha un fattore con denominatore diverso dal numero stesso,[3] ma solo quello con denominatore concorde. Perciò lo moltiplico per l'ultimo numero da sommare, cioè 2; ottengo 6, e dichiaro che questo è il primo numero perfetto in realtà[4] , e che ha quelle parti che si vedono nei numeri che lo compongono. Infatti avrà l'unità [5] come fattore con denominatore uguale a se stesso, cioè la sua sesta parte; e 3 come la metà, che si vede nel 2, e viceversa 2 come la sua terza parte. Anche il ventotto si ottiene con lo stesso metodo quando un altro numero, il 4, viene aggiunto ai precedenti. Per la somma dei tre, 1, 2 e 4, è 7, e si scopre che è primo e incomposto, perché ammette solo il fattore con denominatore come se stesso, la settima parte. Perciò lo moltiplico per la quantità del termine preso per ultimo nella sommatoria, e il mio risultato è 28, uguale alle sue parti, e con i suoi fattori derivati dai numeri già citati, una metà corrispondente a 2; un quarto, a 7; un settimo, a4; un quattordicesimo a sfalsato la metà; e un ventottesimo, secondo la sua stessa nomenclatura, che è 1 in tutti i numeri.

Una volta scoperti questi numeri, 6 tra le unità e 28 tra le 6 decine, bisogna fare lo stesso per creare il successivo. Ancora una volta si aggiunge il numero successivo 7, 8, e la somma è 15. Osservando questo, scopro che non abbiamo più un numero primo e incomposto, ma oltre al fattore con denominatore come il numero stesso, [1] abbiamo anche una quinta e una terza , con denominatori diversi.Quindi non lo moltiplico per 8, ma aggiungo il numero successivo, 16, e ne risulta 31. Poiché si tratta di un numero primo, incomposto, per forza di cose verrà moltiplicato, secondo la regola generale del processo, per l'ultimo numero aggiunto,16, e il risultato è 496, nelle centinaia; e poi viene 8,128 nelle migliaia, e così via,[2] per quanto è conveniente seguire.

Ora, l'unità è potenzialmente un numero perfetto, ma non di fatto; infatti, prendendolo dalla serie come primo, osservo di che tipo è, secondo la regola, e lo trovo primo e incomposto; perché lo è in verità,[3] non per partecipazione come gli altri, ma è il primo

1 ThomasTaylor (*Theoretic Arithmetic,* p. 33) riporta la seguente tabella, che mostra come i numeri perfetti possono essere formati con il metodo di Nicomaco:
*Numeri pari:* 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1,024, 2,048, 4,096;
*Numeri dispari ottenuti sommando i precedenti:* **1,3,7.15'. 31.63', 127,255', 1,023', 2,047', 4,095'. 8,191';**
*Numeri perfetti:* 1, 6, 28, 496, 8,128.
I numeri dispari che non sono primi, e quindi non possono essere utilizzati per formare numeri perfetti, sono contrassegnati da un accento.

numero di tutti, e da solo incomposto. Lo moltiplico, quindi, per l'ultimo termine preso nella sommatoria, cioè per se stesso, e il mio risultato è 1; perché 1 per 1 è uguale a 1. Così l'unità è perfetta potenzialmente; perché è potenzialmente uguale alle sue stesse parti, le altre effettivamente.

## CAPITOLO XVII

Dopo aver dato un primo resoconto sistematico della quantità assoluta, passiamo alla quantità relativa. [1] Per quanto riguarda la quantità relativa, quindi, le più alte divisioni generiche sono due, l'uguaglianza e la disuguaglianza; perché ogni cosa vista in confronto con un'altra è o uguale o disuguale, e non c'è una terza cosa oltre a queste.
Ora, l'uguaglianza si vede quando delle cose confrontate una non supera né è inferiore all'altra, per esempio, 10 o rispetto a 100 , 10 rispetto a 10, 2 rispetto a 2, una mina rispetto a una mina, un talento rispetto a un talento, un cubito rispetto a un cubito, e simili, sia in massa che in lunghezza, peso, o qualsiasi tipo di quantità. E come caratteristica peculiare, inoltre, questa relazione 2 non può essere divisa o separata, essendo la più elementare, perché non ammette differenze. Non esiste, infatti, un'uguaglianza di questo tipo e un'uguaglianza di quell'altro, ma l'uguaglianza esiste in un unico e medesimo modo. E ciò che corrisponde a una cosa uguale, a ben vedere, non ha un nome diverso da essa, ma lo stesso;

come "amico", "vicino", "compagno", così anche "uguale"; perché è uguale a un uguale.

L'ineguale, invece, è diviso per suddivisioni, e una parte di esso è il maggiore, l'altra il minore, che hanno nomi opposti e sono antitetici l'uno all'altro nella loro quantità e relazione. Infatti, il maggiore è maggiore di un'altra cosa, e il minore è minore di un'altra cosa in confronto, e i loro nomi non sono gli stessi, ma ciascuno ha nomi diversi, per esempio "padre" e "figlio".
"attaccante" e "colpito", "insegnante" e "allievo" e simili.

Inoltre, del maggiore, separato da una seconda suddivisione in 7 cinque specie,[1] una specie è il multiplo, un'altra il superparticolare, un'altra il multiplo super particolare e un'altra il multiplo superparticolare. E del suo opposto, il minore, 8 si formano similmente per suddivisione cinque specie, opposte alle precedenti cinque varietà del maggiore,il

sottomultiplo, il subsuperparticolare, il subsuperparticolare, submultiplo-superparticolare e submultiplo-superparticolare; Infatti,come l'intero risponde all'intero, il più piccolo al più grande, così anche le varietà corrispondono, ciascuna a ciascuna,

nell'ordine suddetto, con il prefisso sub-.

## CAPITOLO XVIII

Ancora una volta, dunque, il multiplo [1] è la specie del maggiore primo e più originale per natura, come subito vedremo ed è un numero che, quando viene osservato rispetto a un altro, contiene l'intero di quel numero più di una volta. Per esempio, rispetto all'unità, tutti i numeri successivi che iniziano con 2 generano nel loro ordine le forme regolari del multiplo; poiché 2, al primo posto, è e viene chiamato il doppio, 3 il triplo, 4 il quadruplo, e così via; poiché "più di una volta" significa due volte, o tre volte, e così via in successione fino a che si vuole.

A questo risponde il sottomultiplo, che è esso stesso primario nella divisione minore della disuguaglianza. È il numero che, confrontato con uno più grande, è in grado di misurarlo completamente più di una volta, e "più di una volta" inizia con due volte e prosegue all'infinito.

Se poi misura il numero maggiore che si sta confrontando solo due volte, si chiama propriamente sottodoppia, [2] come 1 di 2; se tre volte, sottotripla, come 1 di 3; se quattro volte, sottoquadrupla, come 1 di 4, e così via in successione.

Mentre ognuno di questi,il multiplo e il sottomultiplo, è genericamente infinito, anche le varietà per suddivisione e le specie sono osservate naturalmente per formare una serie infinita. Perché il doppio, iniziando con 2,continua attraverso tutti i numeri pari, come selezioniamo i numeri alterni dalla serie naturale; e questi saranno chiamati doppi rispetto ai numeri pari e dispari posti successivamente iniziando con l'unità. Tutti i numeri [3] dall'inizio due posti a parte, e terzo in ordine, sono triplette, per esempio 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. La loro proprietà è quella di essere alternativamente pari e dispari, ed essi stessi, nella serie regolare dall'unità, sono triplette di tutti i numeri in successione fino a quando si vuole proseguire con il processo.

Le quadruple sono quelle al quarto posto, a distanza di tre, per esempio 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, e così via. Questi sono i quadrupli della serie regolare di numeri che va dall'unità fino a che si ritiene conveniente seguire. Tutti i numeri sono pari, perché basta estrarre i termini alternativi dai numeri pari già selezionati. È dunque necessariamente vero che i numeri pari, senza ulteriori designazioni,[1] sono tutti doppi, quelli alternati quadrupli, quelli a due posti di distanza sestupli e quelli a tre posti di distanza ottupli, e questa serie continuerà, su questa stessa analogia, all'infinito.

Si vedrà che i quintupli sono quelli distanti quattro posti, posti a 7 quinti l'uno dall'altro,[2] e sono essi stessi i quintupli dei numeri successivi che iniziano con l'unità. Sono alternativamente dispari e pari, come le triple.

## CAPITOLO XIX

Il superparticolare,[3] la seconda specie del maggiore sia per natura 1 che per ordine, è un numero che contiene in sé l'intero numero a cui è paragonato, e qualche altro fattore di esso.

Se questo fattore è la metà, il maggiore dei termini confrontati si chiama 2 specificamente * sesquialter, e il minore subsesquialter; se è un terzo, sesquitertiano e subsesquitertiano; e man mano che si va avanti sarà sempre così, in modo che anche queste specie progrediscano all'infinito, pur essendo specie di un genere illimitato.

Infatti, la prima specie, il rapporto sesquialter, ha come conseguenti5 i numeri pari in successione da 2, e nessun altro, e come antecedenti le triple in successione da 3, e nessun altro. Questi devono essere uniti regolarmente, il primo al primo, il secondo al secondo, il terzo al terzo - 3:2,6 14 , 9 :6 , 12:8 - e i numeri analoghi a quelli corrispondenti in posizione. Se ci preoccupiamo di indagare la seconda specie del superparticolare, il sesquiterziano (per la frazione che segue naturalmente dopo la metà è la terza), avremo questa definizione: un numero che contiene l'intero del numero confrontato, e un terzo di esso in aggiunta all'intero. Possiamo avere esempidi esso, nell'ordine proprio delle successive quadruple a partire da 4 unite alle triple da 3, ogni termine con quello nella posizione corrispondente della serie, per esempio, 4 : 3 , 8 : 6 , 1 2 : 9 , e così via all'infinito. È evidente che quello che corrisponde al sesquiterziano ma che viene chiamato, con il prefisso sub-, subsesquiterziano, è il numero, l'insieme di cui è contenuto e una terza parte in aggiunta, per esempio, 3 : 4 , 6 : 8 , 9 : 1 2 , e le coppie di numeri simili nella stessa posizione della serie.

E dobbiamo osservare l'immancabile corollario di tutto questo: le prime forme di ogni serie, i cosiddetti numeri radice, [1] sono l'una accanto all'altra nella serie naturale; le successive alle forme radice mostrano un intervallo di un solo numero; le terze due; le quarte tre;
il quinto quattro; e così via, fino a che si vuole. Inoltre, la frazione da cui prende il nome ciascuno dei superparticolari [2] si vede nel minore dei numeri radicali, mai nel maggiore.

Che per natura e per nessuna disposizione nostra il multiplo sia una forma più elementare e più antica del superparticolare lo impareremo a breve attraverso un processo un po' complicato. E qui, per un semplice

Per dimostrare la validità della dimostrazione, dobbiamo disporre in linee regolari e parallele i multipli sopra indicati, secondo le loro varietà,  prima il doppio in una linea,poi in una seconda il triplo, poi il quadruplo in una terza, e così via fino ai multipli decuplicati, in modo da poter rilevare il loro ordine e la loro varietà, il loro progresso regolato, e quale di essi è naturalmente precedente, e in effetti altri corollari deliziosi nella loro esattezza. Che il diagramma sia il seguente:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

Si esponga in prima fila la serie naturale dall'unità, 10 e poi in ordine le specie del multiplo che ci è stato chiesto di inserire.

Ora, rispetto alle prime righe che iniziano con l'unità, n se leggiamo sia di traverso che in alto e in basso, nella forma della lettera gamma,[1] le righe successive sono entrambe vie, esse stesse nella forma di una gamma, che inizia con 4, sono multipli secondo la prima forma del multiplo, poiché sono doppi. Il primo differisce dall'unità dal primo, il secondo dal secondo per 2, il terzo dal terzo per 3, il successivo per 4, quelli successivi per 5, e troverete che questo segue in tutto.

Le terze file in entrambe le direzioni a partire da 9, la loro origine comune, saranno le triple dei termini di quella stessa prima riga secondo la seconda forma del multiplo; le linee trasversali come la lettera chi,[2] terminano con 3 in entrambe le direzioni, sono da prendere in considerazione. La differenza, per questi numeri, farà progredire dopo la serie di numeri pari, essendo 2 per il primo, 4 per il successivo, 6 per il terzo; e questa differenza la natura ha di sua iniziativa 1 interpolato per noi tra queste righe che stiamo esaminando, come è evidente nel diagramma.

[1] La riga superiore e la colonna di sinistra della tabella che ci viene proposta, incontrandosi con l'1 in un angolo retto, presentano la forma della lettera maiuscola greca gamma, I\ Con i termini di queste righe confrontiamo quelli della riga 2 e della colonna 2, che si incontrano nel termine 4 e formano la stessa figura, una T; ma queste seconde righe sono considerate non come se terminassero con il 4, ma come se continuassero con i termini 2 della prima riga e della prima colonna, come mostra l'osservazione immediatamente successiva di Nicomaco e come lo interpreta Boezio (I. 27). Il primo termine della prima serie, 1, è superato dal primo termine della seconda, 2, da 1, e così*>n; cfr. sezione 6 sopra.

[2] La riga 3 e la colonna 3, che ora confrontiamo con la riga x e la colonna 1, si incontrano al termine 9 a e si estendono da 9 a 3 sia nella prima riga che nella prima colonna. Presentano quindi l'aspetto della lettera maiuscola greca chi (X), le cui due linee nelle iscrizioni formano spesso angoli retti.

La quarta riga, la cui origine comune in entrambe le direzioni è 16, e le cui linee trasversali 2 terminano con i termini 4, mostra la terza specie di multiplo, la quadrupla, quando essa viene confrontata con quella stessa prima riga secondo le corrispondenti posizioni, primo termine con primo, secondo con il secondo, il terzo con il terzo, e così via. Anche in questo caso, le differenze di questi numeri sono 3, 6, poi 9, poi 12, e le quantità che avanzano per passi di 3. Questi numeri sono individuati [3] nella struttura del diagramma in punti appena sopra le quadruple, e nelle forme successive del multiplo l'analogia sarà valida per tutto il tempo.
Rispetto alla seconda riga che si legge in entrambi i modi, che inizia con l'origine comune 4 e si estende in linee incrociate fino al termine 2 in ogni riga, le righe che sono successive nell'ordine sotto mostrano la prima specie del superparticolare, che è, il sesquialter, tra termini che occupano i corrispondenti posti. Quindi,per natura divina, [4] non per nostra convenzione o accordo, i superparticolari sono di origine successiva ai multipli. Per esempio, 3 è il sesquialter di 2, 6 di 4, 9 di 6, 12 di 8, 15 di 10, e così via. Hanno come differenza 5 i numeri successivi all'unità, come quelli che li precedono.
I sesquiterzi, la seconda specie di superparticolari, procedono con un avanzamento regolare e uniforme da 4 : 3 , 8 : 6 , 1 2 : 9 , 1 6 : 1 2 , e così via; avendo anche un aumento regolare 6 delle loro differenze. E nelle altre relazioni multiple e superparticolari vedrete che i risultati sono in armonia e non sono affatto incoerenti man mano che si procede verso l'infinito.
La seguente caratteristica del diagramma, inoltre, non è meno precisa.
I termini agli angoli sono delle unità; quello all'inizio è un'unità semplice, quello alla fine l'unità del terzo corso,[1] e le altre due unità del secondo corso compaiono due volte; così che il prodotto (dei primi due) è uguale al quadrato (dell'ultimo). Inoltre, nella lettura in entrambi i sensi c'è una progressione uniforme dall'unità alle decine, e di nuovo sui lati opposti due altre progressioni da 10 a 100.

I termini sulla diagonale da 1 a 100 sono tutti numeri quadrati, prodotti di uguali per uguali, e quelli che li affiancano da una parte e dall'altra sono tutti eteromechi, disuguali, prodotti di lati di cui uno è maggiore [2] dell'altro per unità; così la somma di due quadrati successivi e del doppio dei numeri eteromechi tra loro è sempre un quadrato, e viceversa un quadrato è sempre prodotto dai due numeri eteromechi sui lati e dal doppio del quadrato tra loro.
Una persona ambiziosa potrebbe trovare molte altre cose piacevoli in questo diagramma, sulle quali non è il momento di soffermarsi, perché non li abbiamo ancora riconosciuti dalla nostra *Introduzione*, e quindi dobbiamo passare all'argomento successivo. Infatti, dopo queste due relazioni generiche del multiplo e del superparticolare e le altre due, ad esse opposte, con il prefisso sub-, il submultiplo e il subsuperparticolare, ci sono nella divisione maggiore della disuguaglianza il superparticolare, e nella minore il suo opposto, il subsuperparticolare.

## CAPITOLO XX

1 È la relazione superpartiente [1] quando un numero contiene in sé l'intero numero confrontato e in aggiunta più di una parte di esso; e' più di una' inizia con 2 e prosegue con tutti i numeri in successione. Così la forma radicale del superpartiente è naturalmente quella che ha in aggiunta all'intero due parti del numero confrontato, e come specie [2] sarà chiamato superbipartiente; dopo questo quello con tre parti oltre all'intero sarà chiamato supertripartiente come specie; poi viene il superquadripartiente, il superquintipartiente, e così via.

2 Le parti hanno la loro radice e origine con la terza, perché in questo caso è impossibile iniziare con la metà. Infatti, se supponiamo che un numero qualsiasi contenga due metà di il numero comparato oltre all'intero di esso, inavvertitamente creeremo un multiplo invece di un superparziale, perché ogni intero, più due metà di esso, sommati insieme fanno il doppio del numero originale. Perciò è necessario iniziare con due terzi, poi due quinti, due settimi, e dopo questi due noni, seguendo l'avanzamento dei numeri dispari; perché due quarti, per esempio, sono di nuovo una metà, due sesti un terzo,e così di nuovo superparticolari prodotti invece disuperparticolari, il che non è il problema che ci è stato posto né è in accordo con la costruzione sistematica della nostra scienza.

3 Dopo il superpartiente viene prodotto il sottosuperpartiente immediatamente [3], ogni volta che un numero è completamente contenuto in quello a cui è paragonato, e in più diverse parti di esso, 2, 3, 4, o 5, e così via.

[1] Definito da Teone di Smirne, p. 78, 6 ss. Hiller.
* Cfr. I. 19. 2 (p. 215).
[1] Vale a dire che, dato un superparticolare, ne consegue naturalmente l'esistenza di un sottosuperparticolare. Infatti, se 9 è un superpartiente di 7, essendo se di esso, allora 7 è contenuto in 9 se volte ed è un sottosupertiente di 9.

## CAPITOLO XXI

La disposizione regolare e la produzione ordinata di entrambe le specie si scopre quando mettiamo avanti i numeri successivi pari e dispari,cominciando con 3, e confrontiamo con essi le serie semplici di soli numeri dispari,[2] a partire da 5 in successione, dal primo al primo - cioè, da 5 a 3, - dal secondo al secondo - cioè da 7 a 4, - da terzo a terzo - cioè da 9 a 5, - da quarto a quarto - cioè da n a 6, - e così via nello stesso ordine fino a che si vuole. In questo modo le forme del superpartiente e del sotto-superpartiente, nel giusto ordine,saranno rivelate attraverso le forme-radici di ogni specie, prima il superbipartiente,poi il supertripartiente, il superquadripartiente e il superquintipartiente, e poi in successione in modo simile; Infatti,dopo le forme radicali di ogni specie, quelle che le seguono saranno prodotte raddoppiando o triplicando entrambi i termini, e in generale moltiplicando dopo le forme regolari del multiplo.

TABELLA DEI SUPERPARTICOLARI

| Root-forms | 5 | 3 | 7 | 4 | 9 | 5 | 11 | 6 | 13 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 6 | 14 | 8 | 18 | 10 | 22 | 12 | 26 | 14 |
| | 15 | 9 | 21 | 12 | 27 | 15 | 33 | 18 | 39 | 21 |
| | 20 | 12 | 28 | 16 | 36 | 20 | 44 | 24 | 52 | 28 |
| | 25 | 15 | 35 | 20 | 45 | 25 | 55 | 30 | 65 | 35 |
| | 30 | 18 | 42 | 24 | 54 | 30 | 66 | 36 | 78 | 42 |
| | 35 | 21 | 49 | 28 | 63 | 35 | 77 | 42 | 91 | 49 |
| | 40 | 24 | 56 | 32 | 72 | 40 | 88 | 48 | 104 | 56 |
| | 45 | 27 | 63 | 36 | 81 | 45 | 99 | 54 | 117 | 63 |

Si deve osservare che dalle due parti in aggiunta al tutto che sono contenute nel termine maggiore, si deve intendere (terzo, nel caso di tre parti, quarto", con quattro parti, quinto" con cinque, 'sesto/ e così via, in modo che l'ordine di nomenclatura sia qualcosa comequesto:

superbipartiente, supertripartiente, superquadripartiente, poi superquintipartiente, e in modo simile con il resto.

3 Ora le relazioni semplici, non composte di quantità relativa sono quelleche sono state enumerate. Quelle che sono composte da esse e come sono stateintrecciate da due in una sono le seguenti, di cui gli antecedenti [1] sono il multiplo superparticolare e il multiplo super particolare, e i conseguenti quelli che sorgono immediatamente in connessione con ciascuno dei primi, chiamati con il prefisso sub-; insieme al multiplo superparticolare il sottomultiplo super particolare, e con il multiplo superparticolare il sottomultiplo superparticolare.
Suddivisione dei generi le specie degli uni corrisponderanno a quelle degli altri, avendo anche questi nomi con il prefisso sub-.

## CAPITOLO XXII

Ora, il multiplo super particolare è una relazione3 in cui il maggiore dei termini confrontati contiene in sé il termine minore più di una volta e in più una parte di esso, qualunque essa sia. Essendo un composto, tale numero è doppiamente diversificato in seguito alle peculiarità della nomenclatura dei suoi componenti da una parte e dall'altra; Infatti il multiplo superparticolare è composto dal multiplo e dal super particolare genericamente, avrà nelle sue suddivisioni secondo le specie una sorta di diversificazione e di cambiamento dei nomi propri sia della prima parte del nome sia della seconda. Per esempio, nella prima parte, cioè il multiplo, avrà il doppio, il triplo, il quadruplo, il quintuplo e così via, e nella seconda parte, genericamente dal super particolare, le sue forme specifiche in ordine sparso, il sesquialter, il sesquiterziano, il sesquiquartano,il sesquiquintano, e così via, in modo che la combinazione proceda più o meno in questo ordine:

Doppio sesquialter, doppio sesquitertian, doppio sesquiquartan, doppio sesquiquintan, doppio sesquisextan, e analogamente.

Ricominciando: triplo sesquialter, triplo sesquitertian, triplo sesquiquartan, triplo sesquiquintan.

[1] Si veda I. 19. 2 e la nota, sui termini "antecedente" e “conseguente”.

[1] Cioè, come il superpartiente multiplo corrisponde al superpartiente multiplo, così il superbipartiente multiplo (una sottoclasse) risponde al superbipartiente multiplo, ecc.

* Teone di Smirne, p. 78, 23 ss. Hiller, definisce questa ratio.

Ancora: quadruplo sesquialter, quadruplo sesquitertian, quadruplo sesquiquartan, quadruplo sesquiquintan.

Ancora: quintuplo sesquialter, quintuplo sesquitertiano, quintuplo sesquiquartano, quintuplo sesquiquintano, e le forme analoghe a queste *all'infinito*. Qualunque sia il numero di volte in cui il maggiore contiene l'intero del minore, da questa quantità prende il nome la prima parte del rapporto dei termini uniti nel multiplo superparticolare; e qualunque sia il fattore, oltre all'intero più volte contenuto, cioè nel termine maggiore, da questo prende il nome il secondo tipo di rapporto di che compone il multiplo superparticolare.
Ne sono un esempio: 5 è il doppio sesquialter 1 di 2 ; 7 il doppio 3 sesquiterziano di 3; 9 il doppio sesquiquartano di 4; 11 il doppio sesquiquintano di 5. Inoltre li produrrete sempre in ordine regolare, in questo modo,confrontando con i successivi numeri pari e dispari a partire da 2 i numeri dispari, esclusivamente, a partire da 5, il primo con il primo, il secondo con il secondo, il terzo con il terzo, e gli altri ciascuno con quello nella stessa posizione della serie. 5 saranno senza eccezione doppi sesquipedali di tutti i numeri pari successivi da 2 in poi, quando confrontano termini nella stessa posizione nella serie; e iniziando con 3, se si espongono tutti quelli con una differenza di 3, come 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, e in un'altra serie si espongono quelli che differiscono di 7, all'infinito, come 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, e il maggiore viene confrontato con il minore, il primo con il primo, il secondo con il secondo, il terzo con il terzo, il quarto con il quarto, e così via, apparirà la seconda specie, il doppio sesquiterziano, disposta nel suo giusto ordine.

E ancora, per ricominciare da capo, se si stabilisce la serie semplice dei quadrupli 4 , 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, e poi si affiancano essa in altra serie i numeri successivi che cominciano con 9, e aumentando di 9, come9, 18, 27, 36, 45, 54, noi avremo rivelato ancora una volta il multiplo superparticolare in una forma specifica, cioè il doppio sesquiquartano nel suo giusto ordine ; e chiunque lo desideri può inventare questo in misura illimitata.
Il secondo tipo inizia con le triple sesquialter, come 7 : 2, 14 : 4, 5 e in generale i numeri che avanzano a passi di 7 rispetto ai numeri pari in ordine a partire da 2. Poi ancora, 10 : 3 è la prima 6 tripla sesquitertiana, 20 :6 la seconda, e, in una parola, i multipli di 10 in successione, rispetto alle triple successive. Questo infatti è evidente, che anche in questo caso i termini più piccoli hanno nomi che corrispondono a quelli più grandi, con il prefisso sub-, secondo la nomenclatura data a tutti. Possiamo osservare con maggiore esattezza e chiarezza nella tavola studiata sopra, perché rispetto alla prima riga le righe successive, in ordine intero,[1] mostrano le forme del multiplo in ordine regolare fino all'infinito quando sono tutte confrontate in ogni caso con la stessa prima riga; equando ogni riga viene confrontata con tutte quelle che la precedono, in successione,prendendo la seconda riga come punto di partenza, tutte le forme del superparticolare vengono prodotte nel loro giusto ordine; e se si inizia con la terza riga, tutte quelle che iniziano con la quinta e che sono dispari nella serie, quando vengono confrontate con questa stessa terza riga[2], e quelle che la seguono, mostreranno tutte le forme del superparticolare nel giusto ordine. Nel caso del superparticolare multiplo, i confronti avranno un ordine naturale se si parte dalla seconda riga e si confrontano i termini della quinta, il primo con il primo, il secondo con il secondo, il terzo con il terzo, e così via, e poi i termini della settima riga con la terza, quelli della nona con la quarta, e si segue l'ordine corrispondente fino a dove si riesce ad arrivare.

[1] Facendo riferimento alla tabella del capitolo 19, le righe successive sono multipli della prima (poiché si tratta semplicemente della tabella delle moltiplicazioni).
[1] Cioè, i confronti devono essere la quinta fila con la terza, la settima con la quarta, la nona con la quinta, ecc.
Quindi avremo:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \text{etc.} = \frac{1\frac{2}{3}}{1}, \text{ superbipartient;}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{14}{8} = \frac{21}{12} = \text{etc.} = \frac{1\frac{3}{4}}{1}, \text{ supertripartient;}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{18}{10} = \frac{27}{15} = \text{etc.} = \frac{1\frac{4}{5}}{1}, \text{ superquadripartient, etc.}$$

## CAPITOLO XXIII

1 Il multiplo superpartiente [3] è la relazione rimanente del numero. Questo, e la relazione chiamata con un nome corrispondente con il prefisso sub-, esistono quando un numero contiene l'intero numero confrontato più di una volta (cioè due, tre o un numero qualsiasi di volte) e alcune parti di esso, più di una, o due, o tre, o quattro, e così via, inoltre. Queste parti [4] non sono metà, per i motivi sopra citati, ma anche terzi, quarti o quinti, e così via.

In base a quanto già detto non è difficile concepire la varietà di questa relazione, perché si differenziano allo stesso modo e coerentemente con quelli che precedono, doppio superbipartito, doppio supertripartito, doppio super quadripartito, e così via. il doppio superbipartente del 3, il 16 del 6,e ingenerale i numeriche iniziano con l'8 e differiscono per l'8 sono doppi superbipartenti di quelli che iniziano con il 3 e differiscono per il 3, quando si confrontano quelli che si trovano nei posti corrispondenti della serie, e nel caso delle altre varietà si potrebbe accertare la loro corretta sequenza seguendo quanto già detto. Anche in questo caso, dobbiamo concepire che la nomenclatura del numero confrontato va avanti e subisce cambiamenti corrispondenti, con l'aggiunta del prefisso sub-.

Siamo così giunti alla fine della nostra speculazione sulle dieci relazioni aritmetiche per una prima Introduzione. Esiste tuttavia un metodo [1] molto preciso e necessario per ogni discussione sulla natura dell'universo, che ci presenta in modo molto chiaro e indiscutibile il fatto che ciò che è giusto e limitato, e che si sottopone alla conoscenza , è naturalmente anteriore all'illimitato, incomprensibile e brutto, e inoltre che le parti e le varietà dell'infinito

[1] Il principio da affermare è quello delle "treregole" (Cantor,*op. cU.t* vol. I, p. 431; Nesselmann, *op. cit.*, p. 198), seguendo il quale, a partire da tre termini uguali, si possono derivare altri insiemi di tre in rapporti diversi, e 'inversione di cui ogni proporzione in tre termini può essere ridotta all'uguaglianza originaria. Il presente scopo è mostrare che l'uguaglianza è più elementare di qualsiasi forma di disuguaglianza misurata dai rapporti (cfr. II. 1. i), e ne consegue che per Nicomaco, in quanto pitagorico, ciò che è vero per i numeri è vero anche per l'universo, e che "uguaglianza" e "uguaglianza" sono quindi elementi e principi. La proposizione non era certamente originale di Nicomaco, poiché la sua storia può essere fatta risalire a diversi secoli fa. In Teone di Smirne (p. 107, 24 Hiller) è riportata con l'autorità di Adrasto, un peripatetico, la cui datazione, secondo l'enciclopedia Pauly-Wissowa, risale alla metà del II secolo d.C.
E. Hiller *(Rhein. Afus.*, vol. XXV I, pp. 582 ss.) ha dimostrato che il libro di Adrasto che Teone è probabilmente la citazione è il suo commento" al *Timeo* di Platone. Dal contesto di Teone è probabile che Eratostene (276-194 a.C. *circa*) conoscesse le "tre regole". Egli viene citato con queste parole: "Prendiamo tre grandezze e la proporzione che vi risiede, cambiamo i termini e mostreremo che tutta la matematica è costituita dalla proporzione di quantità e che la loro fonte e il loro elemento sono il principio della proporzione" . Un'altra citazione di Eratostene(Teone, p.82, *22* e segg.) ci informa che il "principio della proporzione" è ilrapporto, che va preso in considerazione in relazione alle affermazioni precedenti. Teone aggiunge subito, dopo il passoprima citato, "Ma Eratostenedice che egli ometterà le dimostrazioni"

e procede a dare le "tre regole" enunciate da Adrasto. Il riferimento di Eratostene alle "tregrandezze" e al"cambiamento dei termini", tuttavia, sembra, soprattutto alla luce del contesto di Teone, riferirsi a nient'altro che alle "treregole", e dalla sua stessa affermazione che avrebbe "omesso le dimostrazioni", si deve dedurre che queste ultime gli erano familiari. E. Hiller (*Philologus*, vol. XXX, pp. 60 ss.) ha dimostrato che questa citazione di Eratostene è probabilmente tratta dal suo n\aru"'t*6f, e che questo, come il libro di Adrasto, era un commento al *Timeo*.

e illimitati ricevono forma e confini dal primo, e attraverso di esso raggiungono il loro giusto ordine e sequenza, e come gli oggetti portati sotto qualche sigillo [1] o misura tutti ottengono una parte di somiglianza con esso e somiglianza di nome quando cadono sotto la sua influenza. È quindi ragionevole che la parte razionale dell'anima sia l'agente che mette in ordine la parte irrazionale, e che la passione e l'appetito, che trovano posto nelle due forme di disuguaglianza, siano regolati dalla facoltà di ragionare come in una sorta di uguaglianza e di somiglianza.

E da questo processo di equalizzazione scaturiranno le cosiddette virtù etiche, [2] sobrietà, coraggio, gentilezza, autocontrollo, fortezza e simili.

Consideriamo allora la natura del principio che riguarda queste questioni universali. È in grado di dimostrare che tutte le specie complesse della disuguaglianza e le varietà di queste specie sono prodotte dall'uguaglianza, prima e sola, come da una madre e da una radice. Siano dati numeri uguali in tre termini, prima,unità, poi due in un altro gruppo di tre, poi tre, poi quattro, cinque, e così via fino a che si vuole. per opera di un artificio divino e non umano, anzi, della Natura stessa, si produrranno prima i multipli, e tra questi il doppio farà strada, il triplo dopo il doppio, il quadruplo successivo, e poi il quintuplo, e, seguendo l'ordine che abbiamo riconosciuto in precedenza, *ad infinitum;* in secondo luogo, il super particolare, e anche in questo caso la prima forma, il sesquialter, sarà in testa, e la successiva seguirà, il sesquitertiano, e dopo di loro le successive nell'ordine, il sesquiquartano, il sesquiquintano, il sesquisextano, e così via *all'infinito;* in terzo luogo, il super particolare, che ancora una volta il superbiparziente sarà in testa, il supertriparziente lo seguirà immediatamente, e poi verranno il superquadripartiente, il e superquintipartiente secondo quanto detto sopra fino a dove si può procedere.

[1] Ciò che è assolutamente indeterminato non può mai rimanere lo stesso e nemmeno mantenere lo stesso nome nemmeno per un istante, perché allora sarebbe determinato. Oggetti di questo tipo vanno cercati tra le cose materiali menzionate inI. i.3. Quando vengono impressi con la forma, non sono più indeterminati ma determinati; rimangono come se stessi e come il loro modello, la forma ideale, da un momento all'altro, e possono essere chiamati di volta in volta con lo stesso nome ("hanno somiglianza e somiglianza di nome"). Come Nicomaco sottolinea sopra (I. 1. 2 - 2.1), è solo in virtù della forma con cui sono impresse e non di se stesse che tali cose hanno esistenza e denominazione; sia il loro essere che il loro nome sono quelli delle forme e non i loro propri.

# Aristotele dà la sobrietà come media nelle questioni che riguardano il piacere e il dolore, con la licenziosità come eccesso e nessun estremo che la eguagli dal lato della carenza . Il coraggio è definito la via di mezzo tra la paura e la temerarietà. La gentilezza: cfr. *ibid.,* 1108 a 4 ss.; l'autocontrollo e la pazienza sono discussi insieme, *ibid.*, 1145 b 8 ss.

Ora è necessario avere alcune regole, come leggi naturali invariabili e inviolabili, seguendo le quali l'insieme suddetto avanza e progredisce dall'uguaglianza può procedere senza fallire. Queste sono le direzioni: [2] fare il primo uguale al primo, il secondo uguale alla somma del primo e del secondo, e il terzo alla somma di il primo, due volte il secondo, e il terzo. Infatti se si modellasse secondo queste regole si otterrebbero prima tutte le forme del multiplo in ordine di i tre termini dati dell'uguaglianza , per germogliando e crescendo senza che voi prestiate attenzione o offriate alcun aiuto.
Dall'uguaglianza si otterrà prima il doppio; dal doppio il triplo, dal doppio il triplo.
il triplo successivamente il quadruplo, e da questo il quintuplo nel dovuto ordine, e così via. Da questi stessi multipli nel loro ordine regolare, invertiti, si producono immediatamente, per una sorta di necessità naturale, attraverso l'agenzia di le stesse tre regole, i super particolari, e questi non come capita e in modo irregolare, ma nella loro giusta sequenza; Infatti, dalla prima, [4] la doppia, invertita, deriva la prima, la sesquialtera, e dalla seconda, la tripla, la seconda di questa classe, la sesquiterziana; poi la sesquiquartana dalla quadrupla, e in generale ognuna da quella di nome simile. E ricominciando da capo, se i superparticolari 10 vengono esposti nell'ordine della loro produzione, ma con i termini invertiti, vengono alla luce i superparticolari, che naturalmente li seguono,

* Come afferma Teone di Smirne, p. 107, 24 ss. f Adrasto ha così formulato la regola: "Dati tre termini in una qualsiasi proporzione, se se ne prendono altri tre formati da questi, il primo uguale al primo, il secondo uguale alla somma del primo e del secondo, e il terzo la somma del primo, del doppio del secondo e del terzo, quelli così presi saranno di nuovo proporzionali". Algebricamente questo metodo ottiene da a, ar, $ar^2$ la serie, a, a(i -f r), a(i + r) [1]. Tutti i restanti risultati di questo capitolo sono inclusi in questa formula. Gli esempi forniti da Theon iniziano con tre termini uguali, come in questo caso.

[1] l risultati così prodotti saranno:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | I | 1 | uguaglianza |
| I | 2 | 4 | doppi |
| I | 3 | 9 | triple |
| I | 4 | 16 | quadruplica |
| I | 5 | 25 | quintuple, ecc. |

Theon dà risultati simili.

[4] Teone include questo processo nella sua discussione; i suoi risultati sono i seguenti:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 1, raddoppia invertendo, dando | 4 | 6 | 9, sesquialter |
| 9 | 3 | 1, invertendo le triple, che danno | 9 | 12 | 16, sesquiterzi |
| 16 | 4 | 1, si quadruplica invertendo, dando | 16 | 20 | 25, sesquiquartani |
| 25 | 5 | 1, quintupli invertiti, che danno | 25 | 30 | 36, sesquiquintans, ecc. |



Il superbipartiente dalsesquialter, [1] ilsupertripartiente dal sesquiterziano, il superquadripartiente dal sesquiquartano, e

11 e così via *all'infinito*. Se, tuttavia, i superparticolari [2] sono esposti con termini non in ordine inverso ma diretto, si producono attraverso le tre regole le superparticolari multiple, la doppia sesquialter dalla prima, la sesquialter; la doppia sesquitertiana dalla seconda, la sesquitertiana,la doppia sesquartan dal terzo, il sesquiquartano, e così via. Da quelli prodotti dall'inversione del superparticolare, cioè i superparticolari, e da quelli prodotti senza tale inversione, i superparticolarimultipli, si producono ancora una volta, nello stesso modo e con le stesse regole, sia quando i termini sono in ordine diretto che inverso, i numeri che mostrano le restanti relazioni numeriche. I seguenti devono bastare come illustrazione di tutto ciò che è stato detto finora, della produzione di questi numeri e della loro sequenza, e dell'

12 uso dell'ordine diretto e dell'ordine inverso. Dal rapporto e dalla proporzione in termini del sesquialter, invertito in modo da iniziare con il termine più grande, nasce un rapporto in rapporti superparziali, il superbipartiente; e da esso in ordine diretto, iniziando con il termine più piccolo,un rapporto multiplo superparticolare, il doppio sesquialter. Ad esempio, da 9, 6, 4 si ottiene 9, 15, 25 oppure 4, 10, 25. Dalla relazione in termini di sesquiterzi, a partire dal termine più grande, si ricava un superpartiente, il supertripartiente; a partire dal termine più piccolo, un doppio sesquiterziano. Per esempio da 16, 12, 9 derivano 16, 28,49 o9, 21,49. E dalla relazione in termini di sesquiquartani, quando è disposta per iniziare con il termine più grande, deriva una superpartizione, la superquadripartizione; quando inizia contermine più piccolo, una superparticolare multipla, la doppia sesquiquintan ;per esempio, da 25, 20, 16 deriva o 25, 45, 81 o 16, 36, 81.
Per tutte queste relazioni così differenziate,[3] e

| [1] Theon riporta anche questa questione. Superparticolari invertite | I risultati: - | | Superpartienti risultanti: |
|---|---|---|---|
| 9 6 4 (sesquialter) | 9 | 15 | 25 (superbipartito) |
| 16 12 9 (sesquiterziano) | 16 | 28 | 49 (supertriplo) |
| 25 20 16 (sesquiquartan) | 25 | 45 | 81 (superquadripartiente), ecc. |
| * I risultati sono i seguenti: Superparticolari: 4 6 9 (sesquialter) | 4 | 10 | Superparticelle multiple: 25 (doppia sesquialter) |
| 9 12 16 (sesquiterziano) | 9 | 21 | 49 (doppio sesquiterio) |
| 16 20 25 (sesquiquartan) | 16 | 36 | 81 (doppio sesquiquartan). |



di quello da cui derivano entrambi i differenziati, l'ultimo termine è sempre lo stesso e un quadrato; il primo termine diventa il più piccolo e invariabilmente gli estremi sono quadrati.

Inoltre, i superpartiti multipli e i superpartiti di altri 16 tipi sono fatti apparire in un altro modo dai superpartiti; per esempio, dalla relazione superbipartita disposta in modo da iniziare con il termine più piccolo viene il doppio superbipartito, ma, disposta in modo da iniziare con il più grande, il rapporto superpartito di 8: 5. Così, da 9, 15, 25 viene o 9, 24, 64 o 25, 40, 64. Dal supertriplo, a partire dal termine più piccolo, si ha il doppio supertriplo e, a partire dal più grande, il rapporto di 1 1 : 7 . Così, da 16, 28, 49 si ottiene o 16, 44, 121 o 49, 77,
1 2 1 . Ancora, dai superquintipartienti, come, ad esempio, 25, 45, 81, a partire dal termine minore si ricava il doppio superquintipartiente nei termini 25, 70, 196, ma a partire dal superpartiente maggiore di nuovo, il rapporto di 14 : 9 , nei termini81, 126,196. E troverete risultati analoghi e in accordo con i precedenti in tutti i casi successivi all'infinito. [1]

* Sono le coppie di rapporti che possono essere derivati da qualsiasi rapporto dato applicando le regole in discussione al rapporto dato preso in ordine diretto e inverso a turno, ed è per quest'ultima circostanza che sono chiamati"contrastati (cosìAst, *Theol. Arithp.* 268, *disiunctis el inler se opposi-tis, una nimirum recta, altera conversa).* Per illustrare ulteriormente il significato si possono esaminare i rapporti citati dall'autore:
*Rapporti originali*:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 9 | 9 | 12 | 16 | 16 | 20 | 25; | *Ordine diretto,* |
| 9 | 6 | 4 | 16 | 12 | 9 | 25 | 20 | 16; | *Ordine inverso,* |
| 9 | 15 | 25 | 16 | 28 | 49 | 25 | 45 | 81; | *Forme derivate,* |
| 4 | 10 | 25 | 9 | 21 | 49 | 16 | 36 | 81 | |

Ora, ogni volta che si producono questi rapporti derivati, (1) l'ultimo termine, un quadrato, è lo stesso in ciascuno di essi (25, 4Q, 81 nello schema precedente); (2) il primo termine della prima derivata è il quadrato maggiore del rapporto originale, ma nel secondo è il minore ("passa dal maggiore al minore"); (3) tutti i termini estremi sono quadrati.

[1] Alcuni MSS (cfr. la notacritica ,p. 70,15 Hoche) aggiungono qui: "Inoltre intutti ildato
Le serie di estremi sono sempre quadrati; e i termini medi derivano dai loro lati moltiplicati insieme; e il primo termine del rapporto generatore diventa il termine minore del rapporto generato. E in entrambi i rapporti generati l'ultimo e maggiore quadrato è lo stesso". Questo materiale è stato utilizzato da Ast per ricostruire il testo dellasezione15, chesi leggerebbe così come l'aggiunta al testo appenatradotta.
Confrontando i rapporti riportati nella nota precedente si può osservare che in 4, 6, 9, ad esempio, la media, 6, è 2 X 3 (il prodotto dei lati dei quadrati 4 e g) e lo stesso vale per gli altri. Inoltre il primo termine di 9, 6, 4 è il più piccolo della serie 9, 15, 25 da esso derivata, mentre la prima terra di 4, 6, 9 è la più piccola della serie derivata 4, 10, 25, e così per le altre.

# LIBRO II

## CAPITOLO I

1 Un elemento è detto essere, ed è, la cosa più piccola che entra nella composizione di un oggetto e la cosa più piccola in cui può essere analizzato. Le lettere, per esempio, sono chiamate gli elementi del discorso letterario, perché da esse si compone tutto il discorso articolato e in esse si risolve infine. suoni sono gli elementi della melodia, perché sono l'inizio della sua composizione e in essi si risolve. I cosiddetti quattro elementi dell''universo in generale sono corpi semplici, fuoco, acqua, aria e terra; [1] perché da essi si spiega la costituzione dell'universo e in essi, infine, lo si concepisce come risolto.

Vogliamo inoltre dimostrare che uguaglianza è il principio elementare2 di Numero relativo; perdi numero assoluto, numero perse, l'unità e la diade [3] sono gli elementi più primitivi, le cose minime di cui si costruisce, anche all'infinito, con cui ha la sua crescita, e con il quale si conclude la sua analisi in termini più piccoli. Abbiamo,tuttavia, dimostrato che nel regno della disuguaglianza avanzamento e dell'aumento hanno la loro origine nell'uguaglianza e proseguono assolutamente tutte le relazioni con una certa regolarità attraverso l'operazione delle tre regole. [4] Resta dunque, per farne un elemento di verità, provare chele analisi anche infine terminano nell'uguaglianza . Che questo sia allora considerato il nostro procedimento.

## CAPITOLO II

i Supponiamo che siano dati tre termini, in qualsiasi relazione e in qualsiasi rapporto, se multipli, superparticolari, superparticolari, o un loro composto, multipli superparticolari o multipli superparziali.

Questi quattro elementi sono stati distinti come corpi primitivi nell'antichità immemorabile, ma l'idea più scientifica di essi come elementi sembra aver avuto origine con Empedocle. Sull'argomento si veda il riassunto di Burnet, *Greek Philosophy, Part I, Tholes to Plato,* p. 26.

Si veda I. 23. 4. *Cfr. Parte I, pp. 99 e segg. [4] Cioè quelle riportate in I. 23. 8.

purché si veda che il termine medio è nello stesso rapporto tra il minore e il maggiore e la media, e viceversa. Sottraete sempre dalla media il termine minore, sia esso il primo o l'ultimo nell'ordine, e ponete il termine minore stesso come primo termine della vostra nuova serie; ponete poi come secondo termine ciò che rimane dal secondo dopo la sottrazione; quindi, dopo aver sottratto la somma del nuovo primo termine e del doppio del nuovo secondo termine dal numero rimanente - cioè il maggiore dei numeri originariamente dati - fate del resto il vostro terzo termine, e i numeri risultanti saranno in un altro rapporto, naturalmente più primitivo. [1] E se di nuovo, nello stesso modo, si sottrae il resto da questi stessi termini, [2] si scoprirà che i tre termini sono passati di nuovo in altri tre più primitivi, e si scoprirà che questo avviene sempre di conseguenza, finché non si riducono all'uguaglianza, da cui appare evidente, per ogni necessità, che l'uguaglianza è il principio elementare della quantità relativa.

A questa speculazione fa seguito un principio molto elegante, estremamente utile nella sua applicazione alla psicogonia platonica 3 e al problema di tutti gli intervalli armonici; Infatti, nel passo platonico ci viene spesso richiesto, ai fini dell'argomentazione, di creare serie di intervalli di due, tre, quattro, cinque,o un numero infinito di rapporti sesquialter, o due sesquiterzi, sesquiquartani, sesquiottavi o superparticolari di qualsiasi tipo, e in ogni caso tre, quattro o cinque di essi, o quanti se ne possono indicare.
È ragionevole che lo si faccia non in modo non scientifico e non intelligente, forse addirittura in modo errato, ma in modo artistico, sicuro e rapido, con la seguente procedura.

## CAPITOLO III

Ogni multiplo si troverà ad essere a capo [4] di tanti rapporti superparticolari corrispondenti nel nome a se stesso, quante sono le sue possibilità di essere rimosso dall'unità,[6] e né più né meno in nessun caso.

[1] Questo perché il processo è inverso al primo. Teone di Smirne, p. n. 19 e segg., dà questa regola, riprendendola da Adrasto.

[7] Ad esempio, prendiamo 8, 32, 128 (serie quadrupla). Il primo termine della nuova serie sarà 8; il secondo sarà 32 - 8 = 24; il terzo sarà 128 - [(2 X 24) + 8], cioè 72. Si ottiene così una serie tripla. Poi, analogamente, da 8, 24, 72 si ricaverà 8, 16, 32, la serie doppia, e da quest'ultima 8, 8, 8, una serie di termini uguali. [3] Cfr. Platone, *Timactis*, 35 A ss.

[4] Ovvero, con riferimento alla tabellina della sezione 4; 'dirigerà una colonna'. '

[1] Ovvero, nell'elenco dei doppi (vedi tabella).

2 I doppi, poi, produrranno 1 sesquialter, il primo uno, il secondo due, il terzo tre, il quarto quattro, il quinto cinque, il sesto sei, e né più né meno, ma per ogni necessità quando i superparticolari che si generano raggiungono il numero adeguato, quando il loro numero concorda con i multipli che hanno generato loro, a quel punto, per così dire, per un espediente divino, si trova il numero che li termina tutti, perché naturalmente non è divisibile per quel fattore per cui la progressione dei rapporti superparticolari è andata avanti.

Dalle triple tutte le sesquiterie procederanno numero pari al numero di termini generatori e termineranno, dopo la perdita dell'indipendenza del loro avanzamento, in numero non divisibile per 3. Allo stesso modo, i sesquiquartani derivano dai quadrupli, raggiungendo culmine dopo la loro progressione indipendente in un numero che non è divisibile per 4.
Ad esempio, dato che i doppi generano sesquialter corrispondenti in numero, [2] la prima fila di multipli [3] sarà 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Ora, poiché il 2 è il primo dopo l'unità, questo sarà l'origine di un solo sesquialter, il 3, il quale numero non è divisibile per 2, per cui da esso potrebbe nascere un altro sesquialter. Il primo doppio, quindi, è produttivo di un solo sesquialter, e il secondo, 4, di due. Infatti produce il proprio sesquialter, 6, e quello di 6, 9, ma non c'è nessun 9 perché non ha metà. L'otto, che è il terzo doppio, è padre di tre sesquialter; unoproprio, 12;il secondo, 18, il sesquialter di 12; e il terzo, 27, quello di 18; non ce n'è un quarto, però, a causa della regola generale, perché 27 non è divisibile per 2. Sedici, il quarto doppio, sarà alla testa di quattro sesquipedali, 24, 36, 54 e infine 81, in modo che siano necessariamente in numero uguale a quello che li ha generati, perché 81 per sua natura non è divisibile per 2. E questo, andando avanti, si scoprirà che vale anche per l'infinito.

3 A titolo illustrativo, si riporta la tabella dei doppi, così: *

1 Nello stesso senso in cui i numeri pari "producevano* sesquialter per mezzo del processo di 1.19. 2 ; ma ogni doppio è qui considerato come la fonte o il produttore non solo del proprio sesquialter, ma anche di questo sesquialter stesso, e così via, fino a quando il rapporto può essere portato avanti in numeri interi.
* Il numero del multiplo è naturalmente quello del suo ordine nella serie dei doppi, o dei tripli, ecc.
s Questa è la sottoclasse più semplice, quella dei doppi.

Il doppio rapporto nella larghezza della tavola

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | |
| | | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 | 96 | |
| The triple ratio along | | | 9 | 18 | 36 | 72 | 144 | The sesquialter ra- |
| the hypotenuse | | | | 27 | 54 | 108 | 216 | tio in the depth |
| | | | | | 81 | 162 | 324 | of the table |
| | | | | | | 243 | 486 | |
| | | | | | | | 729 | |

*Il rapporto triplo lungo l'ipotenusa* *Il rapporto sesquialtero nella profondità della tabella*

CAPITOLO IV

Dobbiamo fare una tabella simile per illustrare la triplice:

Il triplo rapporto di ampiezza

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | |
| | | 4 | 12 | 36 | 108 | 324 | 972 | |
| The quadruple | | | 16 | 48 | 144 | 432 | 1296 | The sesquiter- |
| ratio on the | | | | 64 | 192 | 576 | 1728 | tian ratio in |
| hypotenuse | | | | | 256 | 768 | 2304 | the depth |
| | | | | | | 1024 | 3072 | |
| | | | | | | | 4096 | |

*Il rapporto quadruplo lungo l'ipotenusa* *Il rapporto sesquitertio nella profondità*

Nella tabella precedente osserveremo che allo stesso modo la prima tripla, 3, è a capo di un solo rapporto sesquiterziano, 4, il proprio sesquiterziano, che chiude immediatamente lo sviluppo di un altro simile; infatti 4 non è divisibile per3, e quindi non avrà un sesquiterziano. La seconda tripla è 9, e quindi inizierà una serie di soli due rapporti ossequiosi, 12, il proprio, e 16, quello di 12; ma 16 blocca ulteriori progressi, perché non è divisibile per 3 e quindi non avrà un sesquiterziano. Segue nell'ordine il triplo 27, tre volte tolto 2 da 1, perché i tripli procedono così: 1, 3, 9, pertanto questo numero sarà a capo di tre rapporti sesquiterzi e non più. Il primo è il suo proprio, 36; il secondo il sesquiterziano di 36, 48; il terzo quello dell'ultimo, 64, che non ha più una terza parte e quindi non ammette unsesquiterziano. Il quarto conduce una serie di quattro sesquiterzi e il quinto, ovviamente, cinque.

Questa è dunque l'illustrazione; e per gli altri multipli fate in modo che il modo delle vostre tavole sia lo stesso. Osservate che anche in questo caso, come abbiamo riscontrato nella nostra precedente trattazione, la natura ci mostra che le doppie sono più simili alle originali delle triple, le triple alle quadruple, queste ultime rispetto alle quintuple, e così via per tutto il tempo. le file più alte di figure, attraverso l'ampiezza delle tavole, se sono doppie, avranno doppie che giacciono parallelea loro, e i numeri che giacciono in diagonale, sull'ipotenusa, saranno della varietà successiva successiva,maggiore dii, cioè di triple, viste anche in una serie di linee parallele. Se, invece, ci sono triplette lungo la larghezza, le diagonali saranno in ogni caso quadruple; se le prime sono quadruple, allora le seconde sono quintuple, e così via.

## CAPITOLO V

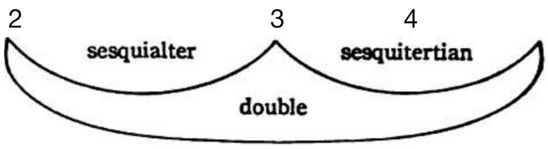
Resta, dopo aver spiegato quali altri rapporti sono prodotti dalla combinazione di rapporti, di passare ai successivi argomenti l'*Introduzione*. Ora i primi due rapporti della superparticolare, combinati,producono il primo rapporto del multiplo, cioè il doppio ; per ogni doppio è una combinazione di sesquialter e sesquiterzi, e ogni sesquialter e sesquiterzi [1] combinati produrranno invariabilmente un doppio.

Per esempio,[2] poiché 3 è il sesquialter di 2 e 4 il sesquiterziano di 3, 4 sarà il doppio di 2, e è una combinazione di sesquialter e sesquiterziano. Ancora, poiché 6 è il doppio di3, troveremo tra loro un qualche numero3 che necessariamente conserverà il rapporto sesquiterziano all'uno e il sesquialter all'altro; e infatti 4, trovandosi tra 6 e 3, dà il rapporto sesquiterziano a 3 e il sesquialter a 6.

Si è detto giustamente, allora, che il doppio, quando si risolve, si risolve nel sesquialter e nel sesquitertian, e che quando sesquialter e sesquitertian si combinano si ha il doppio, e che le prime due forme del superparticolare combinate fanno la prima forma del multiplo.

[1] Ovvero, quando l'ultimo termine del primo è uguale al primo termine del secondo rapporto; poiché data la formula generale per il sesquialter, $a + a/2$ -, quindi il sesquiterio del secondo termine, 2
a + $a/2 + a/3 + a/6 = 2a$, è il doppio del primo termine; o, più semplicemente, $3/2 \times 4/3 = 2$,

* Alcuni MSS illustrano in modo diagrammatico:



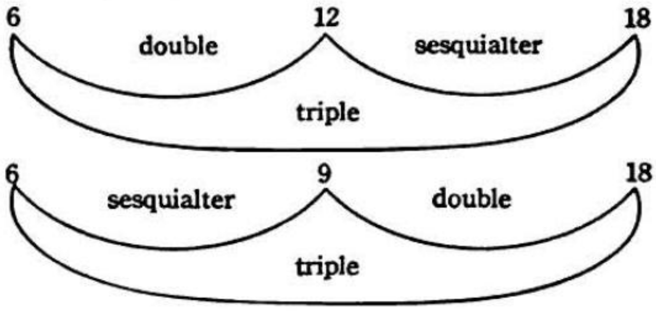

[1] Cioè, dati $a$ e 2 a, in rapporto doppio, $3/2 \times a = 3/4 \times 2a$ .

Ma ancora, per prendere un altro inizio, questa prima forma del multiplo che 4 è stata così prodotta, insieme alla prima forma del superparticolare, [1] produrrà la forma successiva della stessa classe, cioè il secondo multiplo, il triplo; perché da ogni multiplo e sesquialter combinato nasce necessariamente un triplo. Per esempio,[2] poiché il doppio di 6 è 12, e il sesquialter di questo è 18, allora immediatamente 18 è il triplo di 6; e per prendere un altro metodo, se non si fa in modo che il 12 sia il termine medio, ma piuttosto il 9, il sesquialter di 6, si otterrà lo stesso risultato, senza deviazioni e in modo armonioso; infatti, mentre 18 è il doppio di 9, manterrà il rapporto triplo con 6 Quindi dal sesquialter e dal doppio, prime forme di superparticolare e multiplo, nasce per combinazione la seconda forma del multiplo, la tripla, e in esse si risolve sempre. Per esempio, guardate: 6,che è il triplo di 2,avrà un termine medio 3, che presenterà due rapporti, il sesquialter rispetto a 2, e il doppio rapporto di 6 rispetto a se stesso.

Ma se questo triplice rapporto,[3] così come la seconda forma del multiplo, è

[1] The sesquialter.

[2] Diagrams given in the MSS:



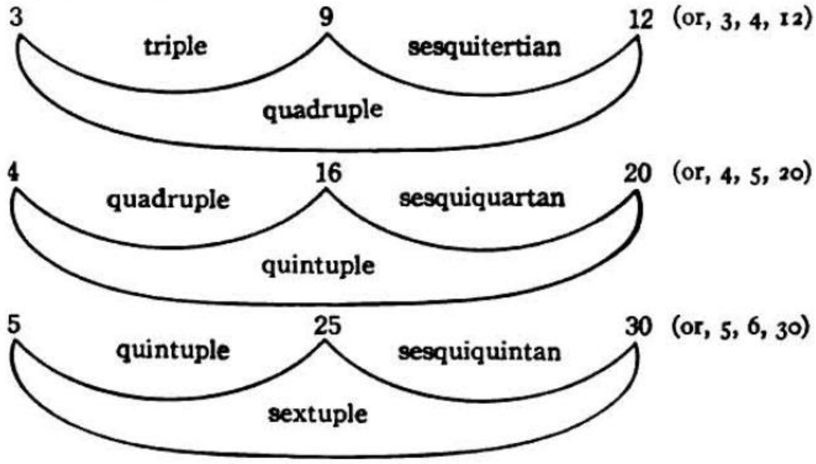

These principles may also be demonstrated in general terms:

$m;\ 2\,m;\ \left(2\,m + \frac{2\,m}{2}\right) = 3\,m,$

or $m;\ m + \frac{m}{2};\ 2\left(m + \frac{m}{2}\right) = 3\,m,$

or, arithmetically, $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 3.$

[3] Diagram from the MSS:




Algebraic statements of the matter above:

(a) $m;\ 3\,m;\ \left(3\,m + \frac{3\,m}{3}\right) = 4\,m,$

combinando con il sesquiterziano, che è la seconda forma del superparticolare, se ne ricaverebbe la forma successiva del multiplo, cioè la quadrupla, e anche questa si risolverà necessariamente in esse secondo lo stesso modo dei casi precedentemente esposti; E il quadruplo, combinando il sesquiquartano, farà il quintuplo, e, ancora una volta, quest'ultimo con il sesquiquintano farà il sestuplo, e così via fino ala fine. Così i multipli in ordine regolare dall'inizio con i superparticolari in ordine regolare dall'inizio troveranno per produrre i multipli successivi più grandi. Per il doppio con il sesquialter fa il triplo, il triplo con il sesquiterziano il quadruplo, il quadruplo con il sesquiquartano ilquintuplo, e fin dove si vuole procedere non apparirà alcun risultato contrario.

## CAPITOLO VI

Fino a questo punto, dunque, abbiamo discusso a sufficienza il numero relativo, attraverso un processo di selezione che misura ciò che è facilmente comprensibile e appropriato alla natura di degli argomenti finora introdotti. Tutto ciò che resta da dire su questo argomento sarà completato dopo che lo avremo messo da parte e avremo prima discusso alcuni argomenti che comportano un'indagine più utile, avendo a che fare con le proprietà del numero assoluto, non di quello relativo.

Per matematico speculazioni[1] sono sempre da incastrare tra loro e da spiegate una per mezzo un'altra... Gli argomenti che dobbiamo prima esaminare e osservare riguardano i numeri lineari, piani e solidi, cubici e sferici, equilateri e scaleni, "mattoni/ "travi/ "cunei/ esimili, la tradizione riguardante i quali, per essere sicuri, poiché sono più strettamente legati alla*grandezza, è propriamente riportata nell'*Introduzione geometrica.* [2] Eppure

$$\text{or, } m;\ m+\frac{m}{3};\ \left(3\,m+\frac{3\,m}{3}\right)=4\,m.$$

$$(b)\qquad m;\ 4\,m;\ \left(4\,m+\frac{4\,m}{4}\right)=5\,m,$$

$$\text{or, } m;\ m+\frac{m}{4};\ \left(4\,m+\frac{4\,m}{4}\right)=5\,m.$$

$$(c)\qquad m;\ 5\,m;\ \left(5\,m+\frac{5\,m}{5}\right)=6\,m,$$

$$\text{or, } m;\ m+\frac{m}{5};\ \left(5\,m+\frac{5\,m}{5}\right)=6\,m.$$

[1] Boezio, II. 4: *A mat enim quodammodo malheseos speculalio alUrna probationem rations constilui.* *Cfr. p. 79.

i germi di queste idee sono ripresi nell'aritmetica, come scienza madre della geometria e più elementare di essa. Ricordiamo infatti che poco fa abbiamo visto che l'aritmetica abolisce con sé le altre scienze,[1] ma non è abolita da esse, e viceversa è necessariamente implicata da esse ma non le implica a sua volta.

Per prima cosa, però,dobbiamo riconoscere che ogni lettera con la quale indicare un numero, come iota, il segno per 10, kappa per 20 e omega per 800, designa quel numero per convenzione e accordo dell'uomo, non per natura. D'altra parte, l'indicazione naturale,non artificiale e quindi più semplice dei numeri sarebbe l'esposizione una accanto all'altra delle unità contenute in ciascuno. Per esempio, la scrittura di un'unità per mezzo di un'alfa sarà il segno di 1; due unità affiancate, cioè una serie di due alfa, sarà il segno di 2;quando tre sono messe in fila,il carattere di 3, quattro in fila per 4, cinque per 5, e così via. Solo con questa notazione e indicazione si potrebbe rendere chiara ed evidente la disposizione schematica dei numeri piani e solidi menzionati:

Il numero 1, **α**
Il numero 2, **αα**
Il numero 3, **ααα**
Il numero 4, **αααα**
Il numero 5, **ααααα**

e oltre in modo analogo.

Allora, occupando il posto e il carattere di un punto, sarà3 l'inizio di intervalli e di numeri,ma non è esso stesso un intervallo o un numero,[2] così come il punto è l'inizio di una linea, o di un intervallo, ma non è esso stesso linea o intervallo. [3] Infatti, quando un punto viene aggiunto a un punto, non aumenta, perché quando una cosa non dimensionale viene aggiunta a un'altra cosa non dimensionale, non avrà quindi dimensione; proprio come se si dovesse esaminare la somma di nulla aggiunta a nulla,

[1] Cfr. I. 4. 2 -5. [1] Cfr. p. 116.

* Con questo passo va confrontato Teone di Smirne, p. 81, 6 e segg. dove si definisce l'"intervallo" (id- *errtfia)*: "L'intervallo e il rapporto *(\byos)* sono diversi, perché l'intervallo è ciò che si trova tra termini omogenei e diseguali, il rapporto è solo la relazione di termini omogenei tra loro.
Pertanto, nel caso di termini uguali non c'è alcun intervallo tra loro, ma c'è un unico e medesimo rapporto, quello di uguaglianza; mentre nel caso di termini disuguali, c’è un unico e medesimo intervallo da ciascuno a ciascuno, ma un rapporto diverso e opposto tra ciascuno e ciascuno Per esempio,è uno stesso intervallo da 2 a i e da 1 a 2, ma un rapporto diverso; 2 : x è un rapporto doppio e 1 : 2 è la metà". Cita poi Eratostene sull'argomento. Questo spiegherà quanto detto di seguito sugli intervalli in relazione alla relazione di uguaglianza.

che non produce nulla. Abbiamo visto [1] una cosa simile anche nel caso dell'uguaglianza tra i parenti; infatti si conserva una proporzione - come il primo sta al secondo, così il secondo sta al terzo - ma non si genera alcun intervallo nella relazione degli estremi tra loro, come invece avviene in tutte le altre relazioni ad eccezione dell'uguaglianza. Esattamente allo stesso modo 2 l'unità da sola, al di fuori di ogni numero, quando si moltiplica, non produce nulla di più grande di sé.

L'unità, quindi, è non-dimensionale e elementare, e la dimensione si trova e si vede prima nel 2, poi nel 3, poi nel 4, e in successione nei numeri successivi; per 'dimensione' è quella che si concepisce di come tra due limiti.

1 La prima dimensione è chiamata' linea/ per 'linea' è ciò che si estende in una direzione. Due dimensioni sono chiamate"superficie", perché una"superficie" è due direzioni. Tre dimensioni sono chiamate "solido", perché un "solido" è ciò che si estende in tre direzioni, e non è assolutamente possibile concepire un solido che abbia più di tre dimensioni: profondità, larghezza e lunghezza. Con queste si definiscono le sei direzioni che si dice esistano in relazione a ogni corpo e con le quali si distinguono i moti nello spazio, avanti, indietro, in alto, in basso, a destra e a sinistra; per di necessità due direzioni opposte l'una all'altra si susseguono in ogni dimensione, in alto e in basso in una, in avanti e all'indietro nella seconda, e a destra e a sinistra nella terza.

[1] Il riferimento è la serie di numeri uguali impiegata in I. 23. 7 e segg. Nella serie i, i, 1; 2, 2, 2, ecc. il rapporto è lo stesso tra qualsiasi coppia di termini; gli estremi hanno lo stesso rapporto dei medi, cioè sono tutti uguali, quindi non c'è intervallo tra gli estremi.

* I neopitagorici usavano comunemente questo fatto per avvalorare la loro identificazione della monade con Dio. Come Dio, la monade è immutabile ed eterna (ad esempio, Calcidio, *Comm, in Tim.*, c. 39: *sola inconcusso iure est atque in statu suo per several; semper eadem.* .. *immutabilis, el singularitas semper).* Il nome monade deriva da [1] rimane 9{novdt*, plpttv)* perché la monade "rimane" la stessa in queste condizioni (cfr. *Theol. Aritkp.* 3 Ast; Iamblichus *In Nic.*, p. 11, 24 s.; Theon, p. 19, 7).
Si veda anche II. 17. 4.

* Anche Filone Giuda, *De Decalogo,* 7, afferma che le dimensioni possono essere solo tre *(vXclovi* 7dp *rpiCjv dtaerdeets otic iytrvrjaew).*

[4] Anche le sei categorie di posizione relativa (e di moto) erano spesso citate nelle argomentazioni neopitagoriche; l'argomento era, inoltre,investito di maggiore significato dal fatto che Platone lo impiegava, in stretta connessione con le varietà di moto, in *Timeo,* 43B. Aggiungendo la rotazione, Platone cita sette varietà di moto, *ibidem,* 34 A (cfr. 40 A-B), e 10 (non tutte spaziali, però) nelle *Leggi*, 894
c. I neopitagorici consideravano significativo delle virtù peculiari di 6, quindi, il fatto che ci fossero sLx "cosiddette posizioni spaziali" *{Theol. Arith.*, p. 36 Ast, ctf Xe76/i*wu *awnarucal wepierdeeit;* cfr. anche Philo, *Leg. Allega* I. 2; (Plut.) *Epit.*, III. 15, 10 = *Doxog. Graee. y* 380, 24; M. Capella, VII, 736, che aggiunge che il settimo, moto circolare,è eterno). Molti di loro hanno usato il gruppo dei sette moti in modo simile per elogiare il numero 7 (ad esempio, Anatolius, *ap. Theol. Arith.*, p. 42 Ast; Lydus, *De Mens.,* II, 11; Philo, *De Mund. Op.,* 41, e *Leg. Alleg.,* I. 4; Macrobio, *Comm, in Somn. Scip.,* I. 6. 81). Nicomaco, dunque, utilizza un argomento molto frequente.

al quarto; infatti una tale situazione rende il prodotto dei mezzi uguale al prodotto degli estremi. E ancora, se si dimostra che il termine maggiore differisce da quello successivo per la quantità con cui quest'ultimo differisce dal termine minore, tale serie diventa una proporzione aritmetica e la somma degli estremi è il doppio della media. Ma se il terzo termine dal più grande supera ed è superato dalla stessa frazione degli estremi, è armonico e il prodotto della media per la somma degli estremi è il doppio del prodotto degli estremi.

Sia questo un esempio di questa proporzione, 6, 8, 9,12. 6 è un numero scaleno, derivato da 1 per 2 per 3, e 12 deriva dalla moltiplicazione successiva di 2 per 2 per 3; dei termini medi il minore deriva da 1 per 2 per4, e il maggiore da 1 per 3 per3. Gli estremi sono sia solidi che tridimensionali, e i medi sono della stessa classe.Secondo la proporzione geometrica, come 12 sta a 8, così 9 sta a 6; secondo l'aritmetica, come 12 supera 9, di tanto 9 supera 6; e secondo l'armonica, per la frazione di cui 8 supera 6, [1] visto come frazione di 6, 8 è superato anche da 12, visto come frazione di 12.

Inoltre 8:6 o 12 :9 è il diatessaron, in rapporto sesquiterziano; 9:6 o 12 :8 è il diapente nel sesquialter; 12 :6 è il diapason nel doppio. Infine, 9:8 è l'intervallo di un tono, nel rapporto di superottava, che è la misura comune di tutti i rapporti in musica, in quanto è anche la più familiare, perché è anche la differenza2 tra il primo e i più elementari intervalli.

E questo è sufficiente per una prima *introduzione* ai fenomeni e alle proprietà del numero.

[1] 8 supera 6 di 2, o di ^ di 6; 12 supera 8 di 4, o di | di 12; quindi 6 , 8 , 1 2 è una serie armonica.

L'affermazione, inoltre, può essere fatta anche al contrario: 5 Se una cosa è solida, ha in ogni caso tre dimensioni, lunghezza, profondità e larghezza; e viceversa, se ha le tre dimensioni, è sempre un solido e nient'altro.

Ciò che ha solo due dimensioni, quindi, non sarà un solido, ma una superficie, perché quest'ultima ammette solo due dimensioni. Anche in questo caso è possibile invertire l'affermazione: direttamente, una superficie è ciò che ha due dimensioni, e viceversa, ciò che ha due dimensioni è sempre una superficie.

La superficie, quindi, è superata dal solido di una dimensione e la linea è superata dalla superficie di una, perché la linea è ciò che si estende in una sola direzione e ha una sola dimensione, e manca al solido di due dimensioni. Il punto è inferiore a quest'ultimo di una dimensione, e quindi si è già detto che è adimensionale, poiché è inferiore al solido di tre dimensioni, alla superficie di due e alla linea di una.

## CAPITOLO VII

Il punto, quindi, è l'inizio di una dimensione, ma non è esso stesso una dimensione, e allo stesso modo l'inizio di una linea, ma non è esso stesso una linea; la linea è l'inizio della superficie, ma non è la superficie; e l'inizio della bidimensionalità, ma non è essa stessa estesa in due direzioni. Naturalmente, anche la superficie è l'inizio2 del corpo, ma non è essa stessa corpo, 2 e allo stesso modo è l'inizio della tridimensionalità, ma non è essa stessa estesa in tre direzioni.

Esattamente come nei numeri, l'unità è l'inizio di tutti i numeri 3 che avanzano di unità in unità in una direzione; il numero lineare è l'inizio del numero piano, che si estende come un piano in un'altra dimensione; e il numero piano è l'inizio del numero solido, che possiede una profondità [3] nella terza dimensione, oltre a quelle originali. Per illustrare e classificare, i numeri lineari sono tutti quelli che iniziano con 2 e avanzano con l'aggiunta di 1 in una stessa dimensione.

I numeri piani sono quelli che iniziano con il 3 come radice più elementare e procedono attraverso i numeri successivi. Ricevono i loro nomi nello stesso ordine: prima ci sono i triangoli, poi i quadrati, dopo questi i pentagoni, poi gli esagoni, gli eptagoni e così via all'infinito, e, come abbiamo detto, prendono il nome dai numeri successivi che iniziano con 3.

**4** Il triangolo, quindi, risulta essere la forma più originale ed elementare del numero piano. Ciò si evince dal fatto che, tra le figure piane[2] rappresentate graficamente, se si tracciano linee dagli angoli ai centri, ogni figura rettilinea si risolve in tanti triangoli quanti sono i suoi lati; ma il triangolo stesso, se trattato come gli altri, non si trasforma in nient'altro che in se stesso.

[1] Nicomaco, qui e nei capitoli successivi, adotta la visione più ampia di ciò che costituisce la classe dei numeri piani. Non tutti gli antichi erano d'accordo con lui; Euclide, negli *Elementi,* VII, *Def.* 17, definisce il numero piano come dovremmo fare noi, come quello che si produce quando due numeri si moltiplicano a vicenda, essendo il moltiplicatore e il moltiplicando i suoi lati , e Teone di Smirne li definisce due volte in modo simile. Th. Martin spiega chiaramente la differenza tra questa applicazione del termine e il suo uso più completo da parte di Nicomaco: "En effet, les nombres rectangles et carr£s expriment la mesure des surfaces, et les nombres parall£lipipWes rectangles et cubiques expriment la mesure des solides. Al contrario, i numeri triangoli, pentagoni, esagoni, ecc. e i numeri t6tra£dres, penta&ires, hexa&dres, ecc. non esprimono altro che una disposizione immaginaria delle unità nella superficie" *(Capitoli IXe e XX* del secondo libro della VIntroduzione Arilhmttique di Nicomaque de Girase*, Roma, 1858, p. 7).

Nonostante la sua definizione, Teone di Smirne elenca i numeri triangolari e altri numeri poligonali, come Nicomaco, e di conseguenza deve aver conosciuto e condiviso in una certa misura la concezione di Nicomaco, indipendentemente dal fatto che fosse consapevole o meno di qualsiasi incongruenza; e che questa concezione fosse in qualche modo diffusa è dimostrato dalla sua comparsa nelle opere di Filone Giudeo (cfr. p. 32). Inoltre, si può notare che questa nozione dei poligonali si ritrova in Diofanto quando *(De Polygonis Numeris,* vol. I, p. 450, 3 Tannery) osserva che "ciascuno dei numeri che iniziano con la triade e aumentano di unità è un numero poligonale di primo grado a partire dalla monade, e ha tanti angoli quante sono le unità che lo compongono, e il suo lato è il numero successivo alla monade, 2". Dal punto di vista di Nicomaco, evidentemente, lo stesso numero potrebbe essere chiamato lineare, piano o solido, a seconda della disposizione presunta delle monadi che lo compongono.

[1] Nicomaco è d'accordo con Platone, *Timeo*, 53 c e segg. nel dichiarare che il triangolo è la forma fondamentale della superficie piana. Platone, nel passo citato, utilizza ulteriormente il principio per spiegare le forme delle particelle più minute dei quattro elementi. Egli concorda con Nicomaco nell'affermare che tutte le superfici piane possono essere ridotte a triangoli *(Timeo,* 53 c, 17 5* *6po),* ma con riferimento alla suddivisione del triangolo stesso, fa notare che ognuna di esse può essere ridotta, facendo cadere una perpendicolare dal vertice (invece di tracciare linee verso il centro, secondo Nicomaco), a due forme elementari, la scalena ad angolo retto o l'isoscele ad angolo retto. Cfr. anche *Theologumena Arithmeticae*, p. i8f Ast, e II. 12. 8.

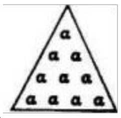
Perciò il triangolo è elementare tra queste figure, perché tutto il resto si risolve in esso, ma esso in nient'altro. Da esso si costituirebbero anche gli altri, ma esso da nessun altro. È quindi l'elemento degli altri e non ha esso stesso un elemento. Allo stesso modo, se l'argomentazione procede nel campo delle forme numeriche, essa confermerà questa affermazione.

## CAPITOLO VIII

Un numero triangolare è quello che, analizzato in 1 unità, dà forma triangolare alla disposizione equilatera delle sue parti in un piano. Il 3, il 6, il 10, il 15, il 21, il 28 e così via ne sono un esempio, poiché le loro formazioni regolari, espresse graficamente, saranno allo stesso tempo triangolari ed equilateri. Man mano che si avanza, si scoprirà che una serie numerica di questo tipo assume, a piacere, la forma triangolare, se si pone come forma più elementare quella che nasce dall'unità, in modo che l'unità possa apparire potenzialmente un triangolo,[1] e il 3 il primo vero e proprio.

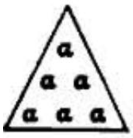
I loro lati aumenteranno per i numeri successivi, poiché il lato di 2, quello potenzialmente primo, è l'unità; quello di quello effettivamente primo, cioè 3, è 2; quello di 6, che è effettivamente secondo, 3; quello del terzo, 4; del quarto, 5; del quinto, 6; e così via.

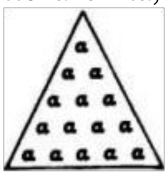
[1] Anche in questo caso si tratta della distinzione tra potenziale ed effettivo, e secondo Teone, p. 33> 5> la monade è il primo numero potenzialmente triangolare. Su cosa si possa intendere per potenzialità in questo caso, cfr. Boezio, II. 8: *Nam si cunclorum mater est numerorum {sc. unitas), quicquid in his quae ab ca nascuntur numeris invenitur necesse est ut ipsa naturali quadam potestate contineal.*

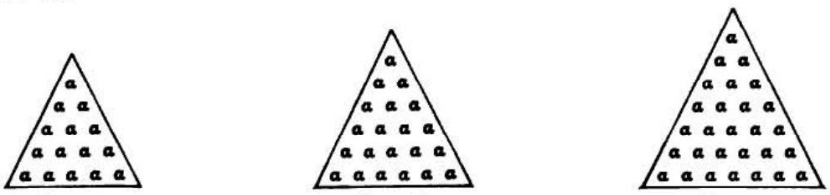
Il numero triangolare si ottiene [2] dalla serie naturale di numeri disposti in linea e dall'aggiunta continua di termini successivi, uno per uno, a partire dall'inizio; infatti, con le successive combinazioni e aggiunte di un altro termine alla somma, si completano i numeri triangolari in ordine regolare. Per esempio, da questa serie naturale: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, n, 12, 13, 14, 15,1 prendono il primo termine e avere il numero triangolare che è potenzialmente primo, 1, A; poi aggiungendo il termine successivo ottengo il triangolo effettivamente primo, perché 2 più 1 è uguale a 3. Nella sua rappresentazione grafica è così composto: Due unità, una accanto all'altra, sono poste sotto un'unità, e il numero tre è reso un triangolo: 

[2] Teone di Smirne, p. 32, *22* e segg., nota questo metodo di generazione dei numeri triangolari. Cfr. anche Johannes Pediasimus, *Geometria*, in *Neue Jahrb. f. Phil. u. Paedvol.* XCII, 1865, pp. 366 ss.
(f. 40 a dello SM di Monaco citato).

Poi, dopo questi, il numero seguente, 3, viene aggiunto, semplificato in unità e unito al primo, dà 6, il secondo triangolo in realtà, e inoltre rappresenta graficamente questo numero:



Ancora una volta, il numero che segue naturalmente, 4, aggiunto e posto al di sotto del primo, ridotto a unità, dà quello in ordine successivo al suddetto, io, e prende un triangolo 5, 
dopo questo, poi 6, poi 7, e tutti i numeri in si aggiungono, in modo che regolarmente i lati di ogni triangolo siano costituiti da tanti numeri1 quanti ne sono stati aggiunti dalla serie naturale per produrlo:

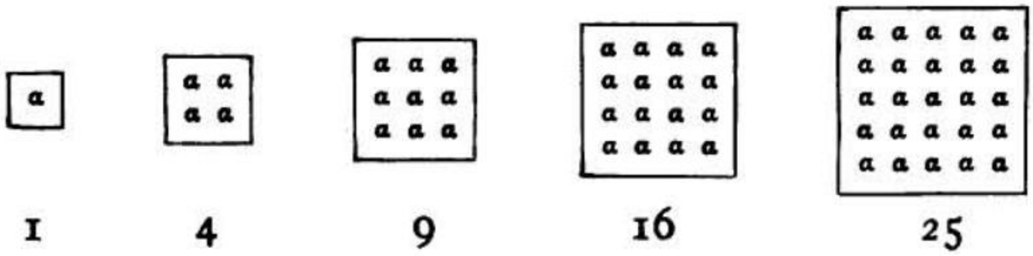


SIDE 5 SIDE 6 SIDE 7

CAPITOLO IX

Il quadrato è il numero successivo 2 , che nella sua rappresentazione grafica non mostra più il 3, come il precedente, ma il 4, ma è comunque equilatero. Prendiamo, ad esempio, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100; le rappresentazioni di questi numeri sono figure quadrate equilatere, come quelle qui mostrate; e sarà simile, per quanto si vuole, a quelle che si trovano in questa figura.

per andare:




È vero per questi numeri, come per i precedenti, che l'avanzamento dei loro lati procede con la serie naturale. Il lato del quadrato potenzialmente primo, 1, è 1; quello di 4, il primo in realtà, 2; quello di 9, in realtà il secondo, 3; quello di 16, il successivo, in realtà il terzo, 4; quello del quarto, 5; del quinto, 6, e così via in generale 3 con tutti quelli che seguono.

[1] Teone di Smirne, p. 37, 13 e segg., afferma che le unità dei lati saranno pari all'ultimo numero aggiunto.
[5] Questo numero è trattato da Teone di Smirne (pp. 26,14; 28,3; 34,1; 39,10), che ripete se stesso più volte.

Questo numero si ottiene anche [1] se si prolunga la serie naturale in linea, aumentando di 1, e non si aggiungono più i numeri successivi ai numeri in ordine, come è stato mostrato prima, ma tutti quelli che si trovano a posti alterni, cioè i numeri dispari. Per il primo,
1, è potenzialmente il primo quadrato; il secondo, 1 più 3, è il primo in realtà; il terzo, 1 più 3 più 5, è il secondo in realtà; il quarto, 1 più 3 più 5 più 7, è il terzo in realtà; il successivo è prodotto dall'aggiunta di 9 ai numeri precedenti, il successivo dall'aggiunta di 11, e così via.

Anche in questi casi è un dato di fatto che il lato di ciascuno di essi è costituito da tante unità quanti sono i numeri presi nella somma per produrlo. [2]

## CAPITOLO X

Il numero pentagonale è un numero che, allo stesso modo, al momento della risoluzione 1 in unità e della rappresentazione come figura piana, assume la forma di un pentagono equilatero. 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 e altri numeri analoghi ne sono un esempio. Ogni lato del primo pentagono reale, 5, è 2, perché 1 è il lato 2 del pentagono potenzialmente primo, 1; 3 è il lato di 12, il secondo di quelli elencati; 4, quello del successivo, 22; 5, quello del successivo in ordine, 35, e 6 del successivo, 51, e così via. In generale, il lato contiene tante unità quanti sono i numeri che sono stati sommati per produrre il pentagono, scelti tra le serie aritmetiche naturali indicate in una riga. Infatti, in modo analogo, per produrre il pentagono [3] si sommano i termini che iniziano con 1 in qualsiasi misura e che sono distanti tra loro di due posti, cioè quelli che hanno una differenza di 3.

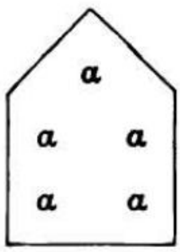
[1] Cfr. Teone di Smirne, *U. cc.* Aggiunge l'ovvia generazione di quadrati moltiplicando i numeri per se stessi (implicita in Nicomaco, II. 18. 3), e aggiunge che i quadrati sono alternativamente pari e dispari ( p. 34 , 3 ). Il metodo di Nicomaco era noto agli antichi pitagorici; cfr. Aristotele, *Phys.*, III. 4, e Cantor, *op. cit.,y* vol. I, p. 160.

[2] Quindi nel primo quadrato, 1, il lato è 1 e per produrlo si prende un solo termine. Nel secondo, 4, il lato è 2 e per produrlo si prendono due termini (1 + 3). In generale, la somma algebrica di 1, 3, 5 a *n* termini è *ti**.

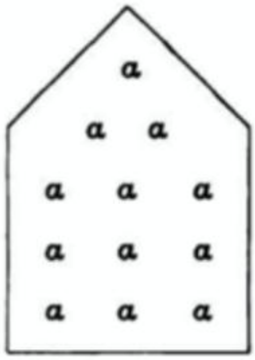
[2] Cfr. Teone di Smirne, pp. 34, 11 e 39, 14, sulla derivazione dei pentagoni.

L'unità è il primo pentagono,[1] potenzialmente, e viene così rappresentata:


5, composto da i più 4, è il secondo, rappresentato in modo simile:

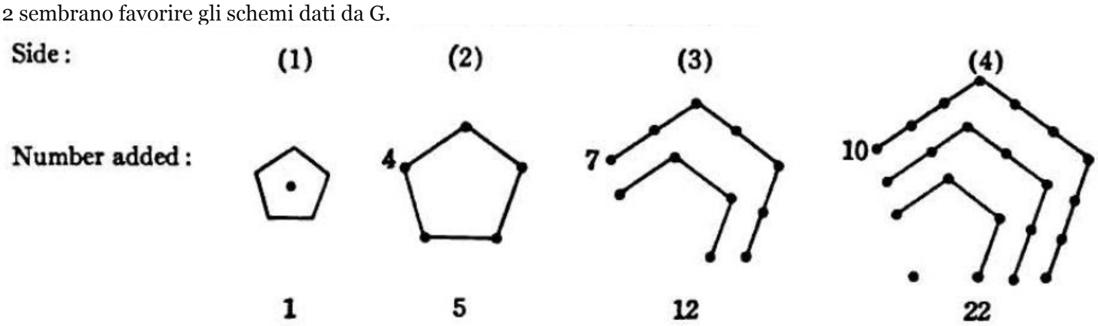



Il 12, il terzo, è composto dai due numeri precedenti con l'aggiunta di 7, in modo da avere 3 come lato, dato che per formarlo sono stati aggiunti tre numeri. Allo stesso modo il pentagono precedente, il 5, era la combinazione di due numeri e aveva come lato 2. La rappresentazione grafica del 12 è questa:




Gli altri numeri pentagonali si otterranno sommando uno dopo l'altro, nel giusto ordine, i termini dopo il 7 che hanno la differenza 3, come, ad esempio, 10, 13, 16, 19, 22, 25, e così via. I pentagoni saranno 22, 35, 51, 70, 92, 117 e così via.

[1] Le figure riportate sono quelle presenti nel MS G. La disposizione regolare a pentagono è data da M. Martin *(op. cit.)* in modo da mostrare i numeri aggiunti di volta in volta. Egli li ricava dalle edizioni di Teone e Iamblico, ma cfr. Hoche, p. 87, note critiche. D'altra parte le affermazioni di II.
12. 2 sembrano favorire gli schemi dati da G.



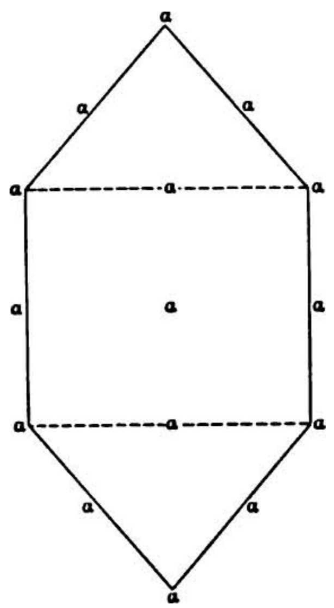
## CAPITOLO XI

I numeri esagonali, eptagonali e successivi saranno presentati nelle loro serie seguendo lo stesso procedimento, se dalla serie naturale dei numeri si stabiliscono serie con le loro differenze crescenti di i. Infatti, come il numero triangolare è stato prodotto ammettendo alla sommatoria i termini che differiscono di i e non passano su nessuno della serie; come il quadrato è stato ottenuto sommando i termini che differiscono di 2 e distano tra loro un posto, e il pentagono allo stesso modo sommando i termini con una differenza di 3 e distanti tra loro due posti (e li abbiamo dimostrati, esponendo esempi sia di essi sia dei numeri poligonali che ne derivano), così anche gli esagoni avranno come radice [1] i termini che differiscono di 4 e distano tra loro tre posti nella serie, che sommati in successione produrranno 2 gli esagoni. Per esempio, 1, 5, 9, 13, 17, 21 e così via; in questo modo i numeri esagonali prodotti saranno 1, 6, 15, 28, 45, 66 e così via, fino a dove si vuole arrivare.

Gli eptagonali, che seguono questi, hanno come radice 2 termini che differiscono di 5 e di quattro posti nella serie, come 1, 6, n, 16, 21, 26,31,36, e così via. Gli eptagoni che si formano sono 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148 e così via.

[1] Cioè gnomoni; il termine è usato in senso più ampio. Si veda I. 9. 4, e cfr. II. 9. 3.

* MS G fornisce il seguente diagramma del numero esagonale 15:



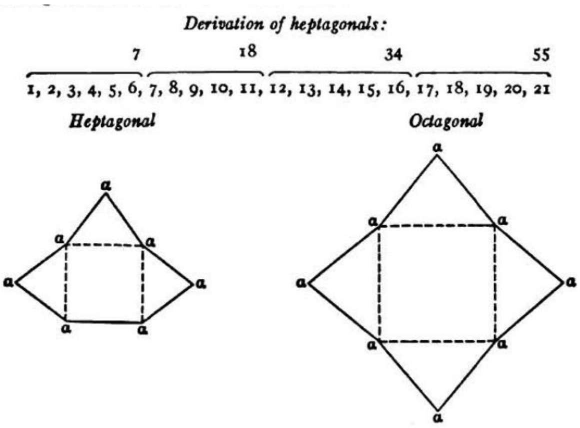
Gli ottagoni1 aumentano allo stesso modo, con una differenza di 6 nei loro numeri di radice e una corrispondente variazione nella loro costituzione totale. Affinché, esaminando tutti i casi, si possa disporre di una regola generale applicabile,[2] si noti che i numeri delle radici di qualsiasi poligonale differiscono di 2 volte meno del numero degli angoli indicati dal nome della poligonale - cioè di 1 nel triangolo, di 2 nel quadrato, di 3 nel pentagono, di 4 nell'esagono, di 5 nell'eptagono, e così via, con un aumento simile.

## CAPITOLO XII

1 Per quanto riguarda la natura dei poligoni piani, questo è sufficiente per una prima *introduzione*. Tuttavia, che la dottrina di questi numeri sia in massimo grado in accordo con la loro rappresentazione geometrica, e non in armonia con essa, sarebbe evidente non solo dalla rappresentazione grafica in ogni caso, ma anche da quanto segue:

[1] Le illustrazioni seguenti sono tratte dallo stesso MS:

*Derivazione degli eptagonali :*




* Cfr. anche Teone, pp. 34,6 e p. 40,11 ss. Il principio qui enunciato da Nicomaco era già stato dato da Ipsicle (*ca.* 180 a.C.), il cui teorema è citato da Diofanto *(Dt Polygonis Nu- merisy Prop.* IV) come segue: "Se tanti numeri a piacere vengono posti a uguale intervallo da i, e l'intervallo è x, la loro somma è un numero triangolare; se l'intervallo è 2, un quadrato; se 3, un pentagonale; e in genere il numero di angoli è maggiore di 2 rispetto all'intervallo". Diofanto riporta questo teorema come teorema di *Ipsicle *iv* fyy/ il che può significare o che si trovava in una definizione che egli fece da qualche parte nei suoi scritti, o che era in un libro chiamato **Opoi*. Cfr. Nesselmann, *op. cti.}* p. 466; Gow, *op. cit.,* p. 87.

Ogni figura quadrata [1] divisa diagonalmente si risolve in due triangoli e ogni numero quadrato si risolve in due numeri triangolari consecutivi, e quindi è composto da due numeri triangolari successivi. Ad esempio, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 e così via sono numeri triangolari e 1, 4, 9 sono numeri triangolari, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, quadrati. Se aggiungete 2 triangoli consecutivi a piacere, otterrete sempre un quadrato e quindi, qualunque sia il quadrato che risolvete, potrete ricavarne due triangoli.

Ancora, qualsiasi triangolo 2 unito a qualsiasi figura quadrata forma un pentagono, ad esempio il triangolo 1 unito al quadrato 4 forma il pentagono 5; il triangolo successivo, il 3, con il 9, il quadrato successivo, forma il pentagono 12; il successivo, il 6, con il quadrato successivo, il 16, forma il pentagono successivo, il 22; il 10 e il 25 danno il 35; e così via.
Analogamente,[3] se i triangoli vengono aggiunti ai pentagoni, seguendo 3

[1] Il MS G illustra le formule della progressione aritmetica nella figura seguente, VEDI FORMULA SOTTO

Il principio può essere dimostrato dalla

[2]

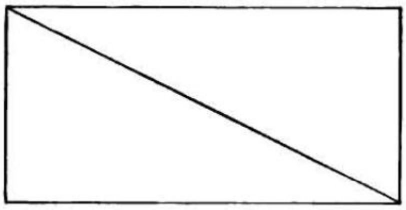
Due numeri triangolari successivi, formati secondo la definizione dalla somma di $n$ e di $n + 1$ termini rispettivamente, sarà quindi VEDI FORMULA SOTTO

e la loro somma è VEDI FORMULA SOTTO, un quadrato perfetto.

**formulas of arithmetic progression,**

$$S = \frac{n}{2}(a + l),\ l = a + (n - 1)d.$$

**Two successive triangular numbers, formed according to definition by the summation of $n$ and $n + 1$ terms respectively, will therefore be $\frac{n^2 + n}{2}$ and $\frac{n^2 + 3n + 2}{2}$, and their sum is $n^2 + 2n + 1$, which is $(n + 1)^2$, a perfect square.**



I neopitagorici utilizzarono un interessante sviluppo di questo principio per mostrare i caratteri relativi della monade e della diade (cfr. *Theol. Arilh.*, p. 9 Ast, e Iamblichus *In Nic.*} p. 75, 20 CF.). La questione è affermata nella *Theol. Arith.*, /. c., come segue: La monade è causa di quadrati non solo perché i numeri dispari disposti successivamente intorno ad essa danno quadrati, ma anche "perché ogni lato, come il punto di svolta (rc. di una doppia corsa) dalla monade come punto di partenza alla monade come traguardo ha come somma dell'andata e del ritorno il proprio quadrato". Cioè, per prendere il lato 5, quando i numeri successivi fino al 5 sono disposti come un lato della pista, il 5 è il punto di svolta e l'altro lato è costituito dai numeri decrescenti fino all'1, ad es.f

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ & & & & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

la somma dell'intera serie è 25, ovvero 5*. La serie 1 ... 5, ovviamente, è un numero triangolare, e la serie discendente 4 . . . 1 quella immediatamente precedente. Per la sua somiglianza con la doppia corsa dei giochi greci, questa proposizione fu apparentemente riconosciuta con il nome di "diaulos" (cfr. Iamblichus, p. 75, 25). La sua ulteriore applicazione ai numeri eteromeci non è pertinente al presente argomento.
Questo si può notare confrontando la figura del pentagono come mostrato nei diagrammi che accompagnano il capitolo X; ed è un argomento a favore della loro rappresentazione come quella del MS G.
Questa proposizione e la precedente sono casi particolari del teorema secondo cui il numero poligonale...

lo stesso ordine, produrranno gli esagoni nel giusto ordine, e ancora gli stessi triangoli con questi ultimi produrranno gli eptagonali in ordine, gli ottagonali dopo gli eptagonali, e così via all'infinito.

Per ricordarcelo, disponiamo le file dei poligonali, scritte in linee parallele, come segue: La prima fila, triangoli, la successiva quadrati, dopo di loro pentagoni, poi esagoni, poi eptagonali, poi se si vuole i poligonali successivi.

È inoltre possibile disporre i poligonali successivi secondo linee parallele simili.

In generale, si scoprirà che i quadrati sono la somma dei triangoli sopra quelli che occupano lo stesso posto nella serie, più i numeri della stessa classe nel posto successivo; [1] per esempio, 4 è uguale a 3 più 1, 9 è uguale a 6 più 3, 16 è uguale a 10 più 6, 25 è uguale a 15 più 10, 36 è uguale a 21 più 15, e così via.

I pentagoni sono la somma dei quadrati che li precedono nello stesso posto della serie, più i triangoli elementari che si trovano un posto più indietro nella serie; per esempio, 5 è uguale a 4 più 1, 12 è uguale a 9 più 3, 22 è uguale a 16 più 6, 35 è uguale a 25 più 10, e così via.

Anche in questo caso, gli esagoni sono similmente la somma dei pentagoni che li precedono nello stesso punto della serie più i triangoli un posto indietro; per esempio, 6 è uguale a 5 più 1, 15 è uguale a 12 più 3, 28 è uguale a 22 più 6, 45 è uguale a 35 più 10, e così via.

Lo stesso vale per gli eptagonali, perché 7 è la somma di 6 e 1, 18 è uguale a 15 più 3, 34 è uguale a 28 più 6, e così via. Quindi ogni numero poligonale è la somma della poligonale che si trova nello stesso posto della serie con un angolo in meno, più il triangolo che si trova nella fila più alta, un posto indietro nella serie.

Naturalmente, quindi, il triangolo è l'elemento del poligono2 sia in cifre che in numeri, e diciamo questo perché nella tabella, leggendo sia in alto e in basso che trasversalmente, si scopre che i numeri successivi nelle righe hanno come differenza i triangoli in ordine regolare.

[1] Ovvero, nella colonna accanto a sinistra.

* Cfr. II. 7. 4. *Theol. Arith.y* p. 8 Ast, afferma che il triangolo è l'elemento sia delle grandezze sia dei numeri ed è formato dal congresso della monade e della diade.

## CAPITOLO XIII

Da ciò è facile capire che cos'è il numero solido e come la sua serie 1 progredisca con lati uguali; infatti il numero che, oltre alle due dimensioni contemplate nella rappresentazione grafica in un piano, lunghezza e larghezza, ha una terza dimensione, che alcuni chiamano . profondità, altri spessore e altri ancora altezza, sarebbe un numero solido, esteso in tre direzioni e dotato di lunghezza, profondità e larghezza.

Questa forma fa la sua prima apparizione nelle cosiddette piramidi. Queste 2 nascono da basi piuttosto larghe che si restringono fino a un apice acuto, prima dopo la forma triangolare [2] da una base triangolare, poi dopo la forma del quadrato da una base quadrata, e successivamente dopo la forma pentagonale da una base pentagonale, poi analogamente dall'esagono, dall'eptagono, dall'ottagono e così via all'infinito. Esattamente come tra le figure geometriche solide; se si immaginano tre 3
Se dai tre angoli di un triangolo equilatero partissero delle rette, di lunghezza uguale ai lati del triangolo, convergenti nella dimensione altezza verso uno stesso punto, si otterrebbe una piramide delimitata da quattro triangoli, equilateri e uguali tra loro, di cui uno è il triangolo originale e gli altri tre sono delimitati dalle tre rette suddette. E ancora, se si concepiscono quattro rette che partono da un quadrato, di lunghezza uguale ai lati del quadrato, ciascuna a ciascuna, e che convergono nella dimensione dell'altezza verso uno stesso punto, si otterrebbe una piramide a base quadrata e di forma quadrata decrescente, delimitata da quattro triangoli equilateri e da un quadrato, il triangolo originario.

[1] Ast, *Theol. Arithp.* 288, dichiara che /cal irXdroi (la lettura del MS di Parigi per il *vero e proprio* Hoche).
*ard irXdrof, p. 99, 5) è un'interpolazione, ma Hoche conserva le parole sulla base dell'autorità di Filopono. I numeri triangolari indicano le differenze nella tabella presa "in profondità" (xarA *P&dot*); infatti, leggendo la seconda colonna la differenza comune è 1, quella della terza colonna è 3, della quarta 6, e così via, le differenze concordano a turno con ciascuno dei numeri triangolari. Questa osservazione è omessa da Boezio, che dedica II. 19 a mostrare che i numeri triangolari forniscono le differenze prese attraverso la larghezza. Quando i numeri della tabella vengono confrontati con quelli della stessa colonna, ma nella riga successiva, e i confronti vengono effettuati su tutta la tabella, si scopre che le differenze sono i numeri triangolari. Dal punto di vista algebrico, l'equazione corrispondente è la stessa di quella riportata nella nota precedente a II. 12. 3.
* Cioè, le sezioni successive parallele alla base sono triangolari. Sulle piramidi, cfr. Teone, p. 42, 3.
ff.

uno. Partendo da un pentagono [1] , da un esagono, da un eptagono, e per quanto si voglia andare lontano, linee uguali in numero agli angoli, erette nello stesso modo dagli angoli e convergenti verso uno stesso punto, completeranno una piramide che prende il nome dalla sua base pentagonale, esagonale o eptagonale, o in modo simile.

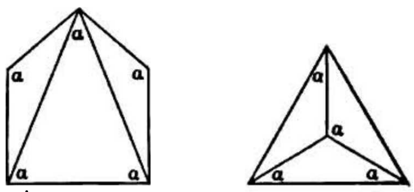
Così anche tra i numeri, ogni numero lineare aumenta dall'unità, come da un punto, come ad esempio 1, 2, 3, 4, 5, e numeri successivi fino all'infinito; e da questi stessi numeri, che sono lineari ed estesi in una direzione, combinati in modo non casuale, si formano i numeri poligonali e piani - i triangoli dalla combinazione di numeri di radice2 immediatamente adiacenti, il quadrato aggiungendo ogni due termini, i pentagoni ogni tre termini e così via. Esattamente allo stesso modo, se i numeri poligonali piani vengono impilati l'uno sull'altro e per così dire costruiti, si ottengono le piramidi affini a ciascuno di essi, la piramide triangolare dai triangoli, la piramide quadrata dai quadrati, la pentagonale dai pentagoni, l'esagonale dagli esagoni e così via.

Le piramidi a base triangolare, quindi, nel loro giusto ordine, sono queste: 1,4, 10, 20, 35, 56, 84, e così via; e la loro origine è l'accumularsi dei numeri triangolari l'uno sull'altro, prima 1, poi 1, 3, poi 1, 3, 6, poi 10 in aggiunta a questi, e poi 15 insieme ai precedenti, poi 21 oltre a questi, poi 28, e così via all'infinito.

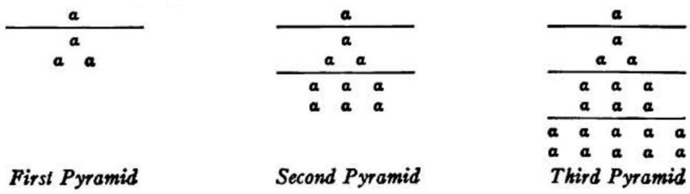
È chiaro che il maggior numero è concepito come il più basso,

[1] I seguenti diagrammi sono tratti dal Codice G:

*Piramidi su base quadrata, triangolare e pentagonale:*



*Piramidi rappresentate numericamente:*




*Prima piramide* *Seconda piramide* *Terza piramide*

Sono costruiti per così dire a strati (cfr. sezioni 7 e 9), come mucchi di pallini o sfere di qualsiasi tipo, e gli strati sono i numeri triangolari in ordine. Se tutti fossero messi in forma triangolare, sarebbe più chiaro.

[1] Ovvero, gnomoni; si veda I. **9. 4.** In questo caso gli gnomoni sono la serie naturale.

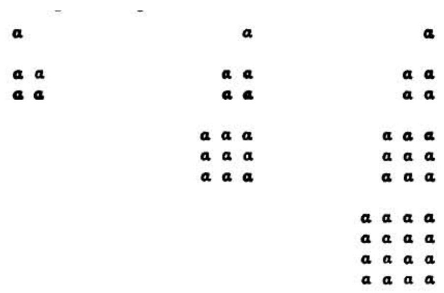
perché si scopre che è la base; la successiva si trova sopra di essa, e la successiva sopra di essa; finché l'unità appare al vertice e, per così dire, riduce la piramide completata a una punta.

## CAPITOLO XIV

Le piramidi successive sono quelle a base quadrata che si innalzano in questa forma fino a un unico punto. Queste si formano nello stesso modo delle piramidi triangolari di cui abbiamo appena parlato. Se infatti estendo in serie i numeri quadrati in ordine a partire dall'unità, quindi 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, e poi pongo i termini successivi, come in una pila, uno sopra l'altro nella dimensione dell'altezza, quando metto 1 sopra 4, si ottiene la prima piramide effettiva a base quadrata, 5, perché anche qui l'unità è potenzialmente la prima. Ancora una volta, metto questa stessa piramide intera, composta da 5 unità, così com'è, sul quadrato 9, ed ecco che mi si forma la piramide 14, con base quadrata e lato 3 - perché la piramide precedente aveva il lato 2, e quella potenzialmente prima 1 come lato. Anche in questo caso, infatti, ogni lato di qualsiasi piramide deve essere composto da tante unità quanti sono i numeri poligonali accatastati per crearlo.

Ancora, pongo [1] l'intera piramide 14, con il quadrato 9 come base, 3 sul quadrato 16 e avrò 30, la terza piramide effettiva di quelle a base quadrata, e con lo stesso ordine e procedura a partire da una base pentagonale, esagonale o eptagonale, e anche andando oltre, produrremo piramidi ammucchiando l'uno sull'altro i numeri poligonali corrispondenti, iniziando con l'unità come il più piccolo e andando avanti all'infinito in ogni caso.

[1] Le piramidi quadrate possono essere rappresentate così:



Questi strati devono essere impilati uno sopra l'altro nello spazio, e quindi i bordi conterranno tante unità quanti sono gli strati, o, in altre parole, tanti quanti sono i numeri quadrati presi in aggiunta.

4 Anche da questo risulta evidente che i triangoli sono i più elementari; infatti tutte le piramidi esposte e mostrate, con le varie basi poligonali, sono delimitate da triangoli fino all'apice.

5 Ma per evitare che si parli di piramidi tronche, bi-tronche e tri-tronche, i cui nomi si incontrano sicuramente negli scritti scientifici, sappiate che se una piramide con un qualsiasi poligono come base, triangolo, quadrato, pentagono o qualsiasi altro poligono successivo, quando aumenta con questo processo di accumulo non si assottiglia nell'unità, si chiama semplicemente tronca, quando rimane senza il vertice naturale che appartiene a tutte le piramidi; Infatti, non termina nel poligono potenziale, l'unità, come in un punto, ma in un altro poligono, un poligono reale, e l'unità non è il suo vertice, ma il suo limite superiore diventa una figura piana con lo stesso numero di angoli della base. Se, però, oltre a non terminare nell'unità, non termina nemmeno nel poligono vicino all'unità e al primo in realtà, tale piramide si chiama bi-troncata, e se, inoltre, non ha il secondo poligono reale al suo limite superiore, ma solo quello successivo, si chiamerà tri-troncata, sì, anche quadrupla, se non ha come limite quello successivo, o quintuplicata al gradino successivo, e così via fino a dove si vuole portare la nomenclatura.

## CAPITOLO XV

1 Mentre l'origine, l'avanzamento, l'incremento e la natura dei numeri solidi equilateri di aspetto piramidale è quella sopra descritta, con il seme e la radice nei numeri poligonali e l'accumulo di questi ultimi nel loro ordine regolare, esiste un'altra serie di numeri solidi di tipo diverso, costituita dai cosiddetti cubi, "travi", "mattoni", "cunei", "sfere" e parallelepipedi, il cui ordine di avanzamento è in qualche modo il seguente:

2 I quadrati 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 e così via, che sono estesi in due direzioni e nella loro rappresentazione grafica in un piano hanno solo lunghezza e larghezza, assumeranno ancora una terza dimensione e saranno solidi ed estesi in tre direzioni se ognuno di essi viene moltiplicato per il proprio lato; il 4, che è 2 volte 2, viene di nuovo moltiplicato per 2, per fare 8; il 9, che è 3 volte 3, viene di nuovo aumentato per 3 in un'altra dimensione e

dà 27; 16, che è 4 per 4, viene moltiplicato per il suo stesso lato, 4, e si ottiene 64; e così via con i quadrati successivi per tutto il tempo.

Anche in questo caso, i lati saranno composti da tante unità quanti erano in 3 i lati dei quadrati da cui sono nati; i lati di 8 saranno 2, come quelli di 4; quelli di 27, 3, come quelli di 9; quelli di 64, 4, come quelli di 16; e così via, in modo che anche il lato dell'unità, il cubo potenziale, sarà 1, che è il lato del quadrato potenziale, 1.

In generale, ogni quadrato è un singolo piano e ha quattro angoli e quattro lati, mentre ogni cubo multiplo, nato da un quadrato moltiplicato per il proprio lato, avrà sempre sei superfici piane, ciascuna uguale al quadrato originale, e dodici spigoli, ciascuno uguale e contenente esattamente lo stesso numero di unità di ciascun lato del quadrato originale, e otto angoli solidi, ciascuno dei quali è delimitato da tre spigoli simili in ogni caso ai lati del quadrato originale.

## CAPITOLO XVI

Ora, poiché il cubo è una figura solida con lati uguali in tutte le dimensioni, 1 in lunghezza, profondità e larghezza, ed è ugualmente esteso in tutte le sei cosiddette direzioni,[1] ne consegue che ad esso si oppone una figura che non ha le sue dimensioni uguali tra loro, ma la sua profondità è ineguale alla sua larghezza e la sua lunghezza è ineguale a una di queste, per esempio 2 volte 3 volte 4, o 2 volte 4 volte 8, o 3 volte 5 volte 12, o una figura che segue qualche altro schema di disuguaglianza.

Tali figure solide[2] , in cui le dimensioni sono ovunque disuguali tra loro, sono chiamate in generale scalene. Alcuni, tuttavia, usando altri nomi, le chiamano "cunei", perché i cunei dei falegnami, dei costruttori di case e dei fabbri e quelli usati in altri mestieri, avendo lati disuguali in ogni direzione, sono fatti in modo da penetrare; iniziano con un'estremità appuntita e si allargano continuamente in modo disuguale in tutte le dimensioni. Alcuni li chiamano anche *sphekiskoi,* "vespe", perché anche i corpi delle vespe sono molto simili a loro, compressi al centro e mostrano la somiglianza menzionata.

Da qui anche il ,[3] 'punto di
l'elmo", deve derivare il suo nome, perché dove è compresso imita la vita della vespa. Altri chiamano gli stessi numeri "altari", usando

[1] Cfr. II. 6. 4 e la nota.

* Cfr. il breve resoconto di Teone sui numeri solidi, p. 41, 8 e segg. Egli ha solo il nome di "altarini" (cfr. sotto) per i numeri scaleni.

[1] Il punto del casco in cui è stato apposto il pennacchio.

La loro stessa metafora, perché gli altari di stile antico, in particolare quelli ionici, non hanno la larghezza uguale alla profondità, né l'una o l'altra uguale alla lunghezza, né la base uguale alla sommità, ma sono ovunque di dimensioni diverse.

3 Ora, mentre i due tipi di numeri, cubo e scaleno, sono estremi, l'uno ugualmente esteso in ogni dimensione, l'altro in modo ineguale, i cosiddetti parallelepipedi sono numeri solidi come mezzi tra loro. Le superfici piane di questi sono numeri eteromechi[1] , così come nel caso dei cubi le facce erano quadrati, come è stato dimostrato.

## CAPITOLO XVII

i Anche in questo caso, per ricominciare da capo, un numero è detto eteromecico2 se la sua rappresentazione, descritta graficamente in un piano, è quadrilatera e quadrangolare, certo, ma i lati non sono uguali tra loro, né la lunghezza è uguale alla larghezza, ma differiscono di i. Esempi sono 2, 6, 12, 20, 30, 42, e così via, perché se li si rappresenta graficamente si avrà

costruirli sempre in questo modo: 1 per 2 è uguale a 2, 2 per 3 è uguale a 6, 3 per 4 è uguale a 12, e i successivi allo stesso modo, 4 volte 5, 5 volte 6, 6 volte 7, 7 volte 8, e così all'infinito, a condizione che un lato sia maggiore dell'altro di 1 e di nessun altro numero. Se, tuttavia, i lati differiscono per un numero diverso da 1, ad esempio per 2, 3, 4 o numeri successivi, come nel caso di 2 volte 4, 3 volte 6, 4 volte 8, o in qualsiasi altro modo essi differiscano, allora un tale numero non sarà più propriamente chiamato eteromecismo, ma numero oblungo. Infatti, gli antichi della scuola di Pitagora e dei suoi successori vedevano l'"altro" [3] e l'"alterità" innanzitutto nel 2, e lo "stesso" e l'"identico" nell'1,

[1] Si veda il capitolo seguente.

# Non esiste un buon equivalente inglese per . Boezio chiama questo numero *altera parte longior.* A questa classe appartengono i numeri del tipo *n{n* + i). La definizione è ripetuta in II. 18. 2; cfr. Teone, p. 26, 21 ss.

*1* "L'altro", "la differenza", "lo stesso" e "la somiglianza" sono termini platonici e non pitagorici. Avrebbero potuto essere inclusi come opposti nelle liste di tali (i *<ru<rroixL<Li*), come quella conservata da Aristotele in Afer/., I. 5; ma non vi compaiono. D'altra parte, Simplicius (*Phys.*, 181, 7 D) ci informa, citando Eudoro, che i Pitagorici facevano del *dpxt* in primo luogo "l'uno" (rA I*), in secondo luogo "l'uno" e il suo opposto, sotto i quali erano classificate rispettivamente "le cose eleganti" (d<rreia) e "le cose triviali" (<£auXa). Questa seconda dpx^, dice ancora Eudoro, era chiamata "diade indefinita" *(d6pi<rrot* di/dt). Anche quest'ultimo è un termine platonico. Lo "stesso" e "l'altro" *(raxrr6vy Odrcpor)* possono essere visti in un contesto platonico nel famoso racconto della creazione dell'anima del mondo, *Timacus,* 35 A e seguenti (si veda II. 18. 4), e sono generalmente considerati pitagorici almeno nell'origine ultima. Platone, tuttavia, era

come i due inizi di tutte le cose, e questi due [1] si trovano a differire l'uno dall'altro solo da 1. Così "l'altro" è fondamentalmente "altro" da i, e da nessun altro numero, e per questo motivo abitualmente "altro "[2] è usato, tra coloro che parlano correttamente, di due cose e non di più di due.

Inoltre, è stato dimostrato che tutti i numeri dispari ricevono la loro forma specifica 2 [3] dall'unità, e tutti i numeri pari da 2. Di conseguenza, diremo naturalmente che i dispari hanno la natura dello "stesso", e i pari quella dell'"altro"; infatti, dalle aggiunte successive di ciascuno di questi - naturalmente, e non per nostro decreto - si produce la classe dei quadrati, e dall'aggiunta dei numeri dispari da 1 a infinito, quella dei numeri etero-mecifici. [4]

Di conseguenza, c'è ogni ragione di pensare che il quadrato una volta di più di 3 condivida la natura dello stesso, poiché i suoi lati mostrano lo stesso rapporto, uguale, immutabile e saldamente fissato nell'uguaglianza, a se stessi; mentre il numero eteromecico partecipa della natura dell'altro; infatti, come l'1 si differenzia dal 2, differendo solo per l'1, così anche il numero eteromecico si differenzia dal 2.

senza dubbio quello che ha contribuito maggiormente alla diffusione di questi termini particolari. Le attuali affermazioni di Nicoma-chus, quindi, possono essere ragionevolmente considerate in accordo con il successivo pitagorismo, fortemente influenzato da Platone. Cfr. anche Teofrasto, *Met.,* 33, p. 322, 14 fr. Teone di Smirne descrive i numeri eteromeci in modo sostanzialmente concorde con Nicomaco. Li definisce brevemente (p. 26, 21) come "quelli con un lato maggiore dell'altro di un'unità" e nota due metodi per produrli in serie: (a) sommando in successione i termini nelle serie dei numeri pari e (6) moltiplicando insieme le coppie successive di termini nella serie naturale. Entrambi i metodi sono citati da Nicomaco (sezioni 1, 2).

[1] Cfr. la pittoresca personificazione di Teone (p. 27, 1): "Per l'inizio dei numeri, la monade, che è dispari, cercando l'alterità, ha reso eteromeca la diade con il suo stesso raddoppiamento".

[1] Una distinzione in termini un po' simili è stata adottata dagli aritmologi (cfr. p. 117, n. 4) come argomento in lode del numero 3 (cfr. *Theol. Ariih.,* p. 14 Ast; Lydus, *De Mcnsibus,* IV. 64 Wiinsch; Anatolius, p. 31, 8 ss. Heiberg; Chalcidius, *In Timaeum*, c. XXXVIII; Theon of Smyrna, p. 100, 13 ss. Hiller). Il significato di questi passaggi è che di 3 possiamo usare prima il termine "tutto", mentre di una cosa o di due cose diciamo "uno" o "entrambi".* Il *Thcologumcna Arithme-ticae* aggiunge che, in espressioni come "tremila diecimila", il 3 è usato come simbolo di pluralità. L'idea che il 3 fosse chiamato "tutto", in quanto primo possessore di inizio, mezzo e fine, è associata all'affermazione di cui sopra in alcune delle fonti citate. Questi passaggi hanno un'attinenza con il presente discorso di Nicomaco in quanto illustrano l'idea pitagorica che l'"alterità", rappresentata dal 2, e la "pluralità" non sono identiche. La dualità e l'alterità, viste per la prima volta e caratterizzate dal 2, sono elementari; la pluralità è derivata.

[3] Boezio, 2. 27, dà la seguente spiegazione del perché il dispari si fonda *{perfici* è la sua espressione) sull'unità e il pari sulla *diade*: *Nam cuiuscunque medietas unus est, ille irnpar esl; cuius veto duo, hie pariiaie recepta in gemina aequa disiungitur.* Cfr. I. 7. 2.

[4] Questo metodo di derivazione della serie eteromeccanica è riportato di seguito in II. 18. 2 e 20. 3, e da Teone (p. 27, 8 ss., 31, 14 ss.).

I lati di ogni numero eteromeccanico differiscono tra loro, uno differisce dall'altro per 1 solo.

Per illustrare, se ho disposto davanti a me i numeri successivi in serie a partire da 1, e seleziono e dispongo da soli i numeri dispari in una riga e i pari da soli in un'altra, si ottengono queste due serie:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28

Ora, dunque, l'inizio della serie dispari è l'unità, che è della stessa classe della serie e possiede la natura di "uguale", per cui, sia che si moltiplichi in due dimensioni sia che si moltiplichi in tre[1] , non si differenzia, né fa sì che un qualsiasi altro numero si allontani da quello che era in origine,[2] ma lo mantiene esattamente com'era. Una tale proprietà è impossibile da qualsiasi altro numero. Delle altre serie l'inizio è il 2, che è simile a questa serie e imita l'"alterità"; infatti, sia che moltiplichi se stesso sia che moltiplichi un altro numero, provoca un cambiamento,[3] per esempio, 2 per 2, 2 per 3.

Ma in casi come 8 volte 8 per 2, o 8 volte 8 per 3, tali forme solide sono chiamate "mattoni "[4] , il prodotto di un numero per se stesso e poi per un numero più piccolo; se invece al quadrato si unisce un'altezza maggiore, come in 3 volte 3 per 7, 3 volte 3 per 8, o 3 volte 3 per 9, o per quante volte si voglia prendere il quadrato, purché sia un numero di volte maggiore del quadrato stesso, allora il numero è una "trave", il prodotto di un numero per se stesso e poi per un numero maggiore.

[1] *hriwMui ff* <rrcfc<ji: [4] come superficie o come solido".

* Cioè quando moltiplica qualsiasi altro numero. Boezio, II. 28, dice dell'unità*: in*
*iantum eiusdem nec midabilis substantiae est, ut, cum vel sc ipsa multiplicaverit vel in planitudine vcl in profunditate, vel si alium quemlibet numerum per se ipsa multiplicel$_t$ a prioris quantitatis forma non discrepet*. Cfr. II. 6. 3.

[1] {xOToffi*: letteralmente "un'uscita da" *(sc.* il suo stato precedente o, come in questo caso, il numero), quindi, * cambiamento". Cfr. Aristotele, *De Anima*, 406 b 13, ircw-a *Klyrjois (KOTOOIS IOTI* rov *turovfUvou $* #ctv*crai. Quando 2 è il moltiplicatore, il risultato è sempre diverso dal moltiplicando; per il sistema numerico di Nicomaco, composto solo da numeri interi positivi, *2X* è sempre diverso da *x*.

[4] Questa definizione si adatta bene a certi tipi di mattoni romani, che erano quadrati nel loro aspetto più ampio e relativamente sottili. I Romani introdussero il mattone cotto nelle terre greche e Nicomaco avrebbe senza dubbio conosciuto questa varietà. Teone, p. 41, 8 e segg., dà lo stesso nome e la stessa definizione. Teone nomina e definisce in modo simile anche le "travi" e i cubi, ma per i [4] cunei ha solo il nome di "altarini" (cfr. II, 16. 2) dei diversi che Nicomaco usa. Erone di Alessandria (Definizione 113, in Hultsch, *Heronis Alexandrini Geomelricorum el Stereometricorum Reliquiae*, p. 31) definisce i "mattoni" come solidi la cui lunghezza è inferiore alla larghezza e alla profondità, le quali a volte sono uguali (sui "mattoni", cfr. anche Teone, p. 113, 5); e la "trave" (*ibid.$_t$ Definizione* 112) la definisce come un solido la cui lunghezza è superiore alla larghezza o allo spessore, i quali a volte sono uguali.

I "cunei", per essere sicuri, erano i prodotti di tre numeri disuguali e i cubi di tre numeri uguali.

Tra i cubi, alcuni di essi, oltre ad essere il prodotto di 7 tre numeri uguali, hanno l'ulteriore proprietà di terminare a ogni moltiplicazione nello stesso numero da cui sono partiti; si chiamano sferici e anche ricorrenti. [1] Sono ali quelli con lati di 5 o 6; infatti, per quante volte io aumenti ognuno di questi, esso terminerà ogni volta con la stessa cifra, la derivata di 6 in 6 e quella di 5 in 5. Per esempio, il prodotto di 5 per 5 terminerà con 5. Per esempio, il prodotto di 5 per 5 terminerà con 5, e così pure 5 volte questo prodotto e, se necessario, ancora 5 volte questo, e all'infinito non si troverà nessun altro termine conclusivo se non 5. Anche da 6, allo stesso modo, 6 e nessun altro sarà il termine conclusivo; e così anche 1 è potenzialmente sferico e ricorrente, perché come è ragionevole ha la stessa proprietà delle sfere e dei cerchi. Infatti, ognuno di essi, girando e rigirando, finisce dove inizia. E così questi numeri suddetti sono gli unici tra i prodotti di fattori uguali a tornare allo stesso punto di partenza da cui sono partiti, nel corso di tutti i loro incrementi. Se aumentano alla maniera dei piani, in due dimensioni, si chiamano circolari, come 1, 25 e 36, derivati da 1 per 1, 5 per 5 e 6 per 6; ma se hanno tre dimensioni, o sono moltiplicati ancora di più, si chiamano numeri solidi sferici, per esempio 1, 125, 216, o, ancora, 1, 625, 1.296.

## CAPITOLO XVIII

Per quanto riguarda i numeri solidi, questo è per ora sufficiente. I filosofi fisici, tuttavia, e quelli che partono dalla matematica, chiamano "lo stesso" e "l'altro" i principi dell'universo, ed è stato dimostrato che "lo stesso" è insito nell'unità e nei numeri dispari, a cui l'unità dà forma specifica, e in misura ancora maggiore nei quadrati, formati dall'aggiunta continua di numeri dispari, perché nei loro lati condividono l'uguaglianza; mentre "l'altro" è insito nel 2 e nell'intera serie pari, a cui il 2 dà forma specifica, e in particolare nel 2 e nel 2.

[1] *dwoKaTaarartKol*: Così Teone di Smirne, p. 38,16 ss. Hiller, che cita il 5 e il 6 come esempi. Anche Lydus (*De Mensibus*, IV. 76 WUnsch) chiama il 5 un <*r<paipa* per lo stesso motivo. Questa proprietà del 5 è menzionata anche da Anatolius, p. 33, *2* ss. Heiberg; e da Capella, *Dc Nuptiis Phil, ct Merc.,* VII, 735 (che lo chiama *afiocaiastaticus)*. Anatolius osserva la proprietà simile di 6; cfr. anche *Theol. Arilh,*
p. 35 Ast. In realtà queste proposizioni erano argomenti regolari di aritmologia.

In particolare nei numeri eteromeci, che sono formati dall'addizione continua dei numeri pari, a causa della quota di disuguaglianza originaria[1] e di "alterità" che hanno nella differenza tra i loro lati. È quindi necessario dimostrare ulteriormente come in questi due, come nelle origini e nei semi, esistano potenzialmente tutte le proprietà peculiari del numero, delle sue forme e suddivisioni, di tutte le sue relazioni, dei poligonali e simili.

Prima, però, dobbiamo fare la distinzione tra il numero oblungo (promecico)[2] e l'eteromecico. L'eteromaco è, come già detto,[3] il prodotto di un numero moltiplicato per un altro più grande del primo di 1, per esempio 6, che è 2 volte 3, o 12, che è 3 volte 4. Ma l'oblungo è allo stesso modo il prodotto di due numeri diversi, che differiscono tra loro di 1, 2 e 3. Ma l'oblungo è anche il prodotto di due numeri diversi, che però non differiscono per 1 ma per un numero più grande, come 2 per 4, 3 per 6, 4 per 8 e altri numeri simili, che in un certo senso superano in lunghezza e in altezza la differenza di 1.

Pertanto, poiché i quadrati nascono dalla moltiplicazione dei numeri per la loro stessa lunghezza e hanno la stessa lunghezza e la stessa larghezza, propriamente parlando si chiamerebbero "idiomecici" o "tau- tomecici"; [4] per esempio, 2 per 2, 3 per 3, 4 per 4, e il resto. E se questo è vero, ammetteranno in ogni modo l'uguaglianza e la parità, e per questo sono limitati e finiscono; perché "l'uguale" e "lo stesso" sono tali in un modo definito. Ma poiché i numeri eteromechi sono prodotti dalla moltiplicazione di un numero per la lunghezza non propria, ma di un altro numero, sono perciò chiamati "eteromechi" e ammettono l'infinito e l'illimitato.

In questo modo, dunque, tutti i numeri e gli oggetti dell'universo che sono stati creati in riferimento ad essi sono divisi e classificati e si vedono opposti l'uno all'altro, e bene fanno gli antichi all'inizio del loro racconto della Natura a fare la prima suddivisione

'Cioè, un'unità, perché è stato mostrato in II. 17. 2 che "l'altro è fondamentalmente altro dall'unità", e la differenza tra i lati di un numero eteromecico è per definizione un'unità.

[1] *Tpofvf/Kiis*: Teone di Smirne, p. 27, 23 ss., dà una definizione simile di questa classe di numeri,
Sebbene li chiami *rapa\\t)\6ypatmot iptd/iol,* a p. 30, 8 e segg. definisce *Tpopfattt* il prodotto di due termini disuguali che differiscono di 1, 2 o di qualsiasi altro numero, includendo così gli eteromeci tra i numeri oblunghi. Teone dà la seguente classificazione degli oblunghi in relazione alla definizione appena citata: (a) i numeri eteromechi sono oblunghi in un certo senso; *(b) i* numeri che per una fattorizzazione sono eteromechi, per un'altra oblunghi, come 12, che è o
3 X 4 o 2 X 6; (c) numeri che sono oblunghi per tutte le possibili fattorizzazioni, ad esempio 40, che è 2 X 20, 4 X 10 o s X 8.

*Cfr. II. 17 . 1 .

* *IStoftliKtii* . . icat rauro/ui) "ti, in opposizione a *btpop^Kut* o *wpo/i^Ktit*.

nella loro cosmogonia su questo principio. Così Platone [1] menziona la distinzione tra le nature dello "stesso" e dell'"altro", e ancora, quella tra l'essenza indivisibile e sempre uguale e quella divisa; e Filolao2 dice che le cose esistenti devono tutte
essere o illimitato o limitato, o limitato e illimitato allo stesso tempo, il che significa che l'universo è composto da cose limitate e illimitate allo stesso tempo, ovviamente secondo l'immagine del numero, poiché tutti i numeri sono composti dall'unità e dalla diade, dal pari e dal dispari, e questi in verità mostrano l'uguaglianza e l'ineguaglianza, l'uguaglianza e l'alterità, il limitato e l'illimitato, il definito e l'indefinito.

## CAPITOLO XIX

Affinché possiamo essere chiaramente persuasi di ciò che viene detto, cioè che le cose sono costituite da elementi contrastanti e opposti 3 e hanno

[1] Cfr. Platone, *Timeo*, 35 A (traduzione di Archer-Hind): "Dalla sostanza indivisa e sempre immutabile e da quella che si divide nei corpi materiali, di entrambe ha mescolato in terzo luogo la forma dell'Essenza, in mezzo tra lo Stesso e l'Altro; e questa l'ha composta in tal modo tra l'indiviso e quello che nei corpi materiali è diviso; e prendendole, in numero di tre, le ha fuse in un'unica forma, costringendo la natura dell'Altro, difficile da mescolare, all'unione con lo Stesso", ecc.
* Filolao, il pitagorico, era originario di Crotone o di Tarentum. Ritter e Preller *(Hist. Phil. Gr.)* dare 440 B.C. come suo *floruit*. Questo frammento (1 b Chaignet, 3 Mullach) si trova in forma molto più completa in Stobaeus, *Eel. Phys.*9 I. 21. 7 (vol. I, p. 187, Wachsmuth-Hense).

3 È lecito chiedersi se Nicomaco abbia in mente le idee strettamente pitagoriche sull'origine e la costituzione dell'universo o il racconto platonico del *Timeo*, che in effetti ha un tono fortemente pitagorico. Altrove fa riferimento al *Timeo* (I. 2. i; II. 2. 3; 18. 4; 24. 6) e sottolinea il fatto che spera di rendere la sua opera utile per l'interpretazione di Platone (II. 24. 11) e dei testi antichi letti nelle scuole, tra i quali era certamente incluso il *Timeo*. (II. 21. 1; 28. 1). C'è così tanto in comune tra Platone e i Pitagorici che probabilmente Nicomaco pensava a entrambi nel fare questa affermazione. Per la dottrina pitagorica secondo cui la materia caotica era ordinata secondo principi armonici, cfr. Filolao, in Stobeo, op.cit., p. 189 (fr. 4 Chaignet, 3 Mullach):

Platone dà un'immagine più chiara dei * costituenti dell'universo in guerra e opposti (Nicomaco non li chiama <rroix*ra, 'elementi') in *Timeo*, 30 A:

Che questo rdfi* sia un'armonia, e inoltre che sia una sorta di armonia matematica, Platone lo fa notare mostrando che è assicurato dall'intreccio dell'anima del mondo in tutta l'estensione dell'universo (36 F.) e che l'anima del mondo è costituita su principi armonici (34 C ss.). Possiamo inoltre confrontare 53 B:

L'idea di un caos di elementi in guerra *(frigida pugnabant calidis*f *umentia siccis*9 Ovidio, *Met*, I. 19) è un luogo comune della letteratura antica dopo Esiodo (cfr. *Filologia classica*, VIII, p. **405** con nota 4). Cfr. con questo passo I. 6. 3.

con ogni probabilità, l'armonia - e l'armonia[1] nasce sempre dagli opposti, perché l'armonia è l'unificazione dei diversi e la riconciliazione dei contrari - esponiamo su due linee parallele non più, come prima, i numeri pari da 2 da soli e i dispari da 1, ma i numeri che si ottengono da questi sommandoli successivamente, i quadrati dai dispari e gli eteromeci dai pari. Infatti, se prestiamo attenzione alla loro esposizione, ammireremo la loro reciproca amicizia e la loro cooperazione per produrre e perfezionare le forme rimanenti, al fine di concepire con probabilità che anche nella natura dell'universo, da qualche fonte come questa, una cosa simile sia stata prodotta dalla provvidenza universale.*

Le due serie siano quindi le seguenti: Quella dei quadrati, a partire dall'unità, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, e quella dei numeri eteromeci, a partire dal 2 e procedendo così, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, no, 132, 156, 182, 210, 240.

In primo luogo, quindi, il primo quadrato è il multiplo fondamentale [3] del primo numero eteromecanico; il secondo, rispetto al secondo, è il suo sesquialter; il terzo, il sesquiterziano del terzo; il quarto, il sesquartano del quarto; poi il sesquiquintano, il sesquisextano, e così via *all'infinito.* Anche le loro differenze[4] aumenteranno secondo i numeri successivi a partire da 1; la differenza dei primi termini è 1, dei secondi 2, dei terzi 3, e così via. Se poi si confronta il secondo termine dei quadrati con il primo numero eteromecanico, il terzo con il secondo, il quarto con il terzo e gli altri in modo analogo, essi manterranno gli stessi rapporti di prima, ma le loro differenze cominceranno a progredire non più da 1, ma da 2, rimanendo uguali a prima, e secondo l'avanzamento osservato nel primo confronto, il primo al primo sarà il primo multiplo, o radice, il secondo al secondo il secondo sesquialter dalla radice.

[1] Cfr. il resto del frammento di Filolao citato nella nota precedente: rd *flip* 6fioia *KCLI 6/i6<pv\a dpfioplat oCSip ireSiovro,* rd *di dp6fio* 1a firjdi 6fi6<pvXa *fiij&i lao\a\j) dvdyxa* r$ *roiatirq. dpfiovlq.* <nry*e*Xei<r0tu, *a fifk\om ip* <ctefup *K&rixtvBai.* Le parole sono citate anche da Teone di Smirne, p. 12, 10, e Ast sul passo cita anche Iamblico, *In Nieom.,* p. 73, 1 Pistelli, e Asclepio, *In Nicom.*

*pbpovoL,* "preveggenza", può essere tradotto anche "provvidenza" e fa riferimento alla teleologia. Già prima di Platone l'idea teleologica era nell'aria, ma fu Platone a farne per primo una parte essenziale della teoria della costituzione dell'universo. Questa è un'altra indicazione che Nicomaco è decisamente un pitagorico platonizzante.

* Cioè il doppio (2 = 2X1). Per l'uso del termine *1xvBfiifp^ si* veda I. 19. 6.

[2] Cioè, confrontando i termini omologhi delle due serie. La differenza tra 1 e 2 è 1; tra 4 e 6, 2; tra 9 e 12, 3; e così via.

il terzo al terzo il terzo sesquiterziano dalla forma radice, e i termini successivi continueranno in modo simile.

Inoltre, i quadrati[1] tra loro avranno come differenze solo i 4 numeri dispari, gli eteromechi, i numeri pari. E se poniamo[2] il primo numero eteromecico come termine medio tra i primi due quadrati, il secondo tra i due successivi, il terzo tra i due successivi e il quarto tra i due successivi, si vedranno ancora più regolarmente le relazioni numeriche[3] in gruppi di tre termini. Infatti, come 4 sta a 2, così 2 sta a 1; e come 9 sta a 6, così 6 sta a 4; e come 16 sta a 12, così 12 sta a 9, e così via, con numeri e rapporti che avanzano regolarmente. Come il maggiore sta al medio, così il medio starà al minore, e non nello stesso rapporto, ma sempre in un rapporto diverso, con un aumento. In tutti i raggruppamenti, inoltre, il prodotto degli estremi è uguale al quadrato della media; e gli estremi, più il doppio della media, per scambio daranno sempre un quadrato. [4] La cosa più bella è che dall'addizione di entrambi[6] scaturisce la produzione dei triangoli nel giusto ordine, dimostrando che la natura di questi è più antica.

[1] *Squares:* 1 4 9 16 25 36 49, etc.
3 5 7 9 11 13, etc.; odd differences.
*Heteromecic:* 2 6 12 20 30 42 56, etc.
4 6 8 10 12 14, etc.; even differences.

[2] Cfr. Teone, p. 28, 16 ss. Hiller.

[1] Cioè, $m^2$, $m(m+1)$ e $(m+1)^2$ costituiscono sempre i termini di una proporzione geometrica. Teone lo nota (c. 16), aggiungendo che i numeri eteromeci successivi non fanno una proporzione con il quadrato incluso; cioè, $m(m-1)$, $m^2$ e $m(m+1)$ non sono proporzionali.

[4] I rapporti formati come indicato e le ulteriori proprietà della serie possono essere visti in questa tabella:

| *Rapporti* | *Somma degli estremi* | *In più* | 2 X *termine medio* | *Somma* |
|---|---|---|---|---|
| 1 : 2 = 2:4 | 5 | + | 4 = | 9 |
| 4:6 = 6:9 | 13 | + | 12 = | 25 |
| 9:12 = 12: 16 | 25 | + | 24 = | 49 |
| 16: 20 = 20: 25 | 41 | + | 40 = | 81 |

In generale, nel rapporto $m^2$: $m(m + 1) = m(m + 1)$: $(m + 1)$*, la somma degli estremi più il doppio della media sarà $4m^2 + 4m + 1$, ovvero un quadrato perfetto.

[4] Questo si può vedere meglio impostando alternativamente i numeri quadrati e i numeri eteromeci e combinandoli a coppie in questo modo:

1 2 4 6 9 12 16 20 25 30
3 6 10 15 21 28 36 45 55 = numeri triangolari.

[6] Questo è significativo per Nicomaco perché riteneva che lo "stesso" e l'"altro" fossero gli elementi ultimi, e che risiedessero per eccellenza rispettivamente nei quadrati e nei numeri eteromeci (cfr. II. 17. 3; 18. 1). Ora, ciò in cui tutte le figure piane sono analizzate in ultima istanza è il triangolo (II. 7. 4; cfr. 12. 8); come mostra lo stesso Nicomaco; e va ricordato che nel *Timeo* il triangolo è reso la base ultima dei corpuscoli degli elementi, una teoria che egli ha senza dubbio in mente. Pertanto, la presente proposizione conferma la sua posizione nel ritenere che "l'identità" e "l'alterità" siano le cose più elementari, precedenti persino al triangolo elementare. Un'interessante conferma dell'interpretazione di cui sopra si trova in

dell'origine di tutte le cose, così: 1 più 2, 2 più 4, 4 più 6, 6 più 9, 9 più 12,12 più 16,16 più 20, e da questo processo nascono in ordine i triangoli, che danno origine ai poligoni.

## CAPITOLO XX

Inoltre, ogni quadrato più il suo lato diventa eteromecico, o per Zeus, se il suo lato viene sottratto da esso. Così, l'"altro" è concepito come maggiore e minore dello "stesso", poiché è prodotto sia dall'addizione sia dalla sottrazione, nello stesso modo in cui anche i due tipi di disuguaglianza1 , la maggiore e la minore, hanno origine da l'applicazione dell'addizione o della sottrazione all'uguaglianza. Anche questa è una prova sufficiente del fatto che le due forme sono accomunate dall'uguaglianza e dall'alterità, dall'alterità in modo indefinito, ma dall'uguaglianza in modo definitivo, dall'1 e dal 2 in modo generico,[2] ma dall'uguaglianza in modo subordinato, perché appartiene alla stessa classe dell'1, e dall'uguaglianza in modo omogeneo, perché è omogeneo al 2.
C'è anche una ragione ancora più chiara per cui il quadrato, essendo il prodotto dell'addizione di numeri dispari, è affine all'uguaglianza, e i numeri eteromeci all'alterità, essendo formati dall'addizione di numeri pari; infatti, come se fossero amiche l'una dell'altra, queste due forme condividono nelle loro due file le stesse differenze quando non hanno gli stessi rapporti, e viceversa gli stessi rapporti quando non hanno le stesse differenze. Infatti, la differenza3 tra 4 e 2 nel

*Thcol. Arith.,* 8 Ast (sulla diade) in un contesto certamente nicomacheo: "Perciò il primo congresso di queste *(sc.* la monade e la diade) ha perfezionato per la prima volta la moltitudine definita, l'elemento delle cose, che sarebbe un triangolo sia di grandezze che di numeri somatici e senza corpo; infatti, come il caglio coagula il latte corrente con la sua proprietà attiva ed efficace, così la forza unificante della monade che si avvicina alla diade, che è la fonte del movimento facile e della dissoluzione, ha dato un legame e una forma che è un numero alla triade; perché questo è l'inizio dell'attualità nel numero come è definito dalla combinazione delle monadi". Nel presente testo "la loro natura" si riferisce ai quadrati e ai numeri eteromeci e "l'origine di tutte le cose" al triangolo, come figura elementare.

[1] Cfr. I. 17. 6. I risultati ottenuti aggiungendo o sottraendo ai numeri quadrati i loro lati sono i seguenti:

| | |
|---|---|
| 4 + 2= 6 = 2X3 | 4 - 2= 2 = 1X2 |
| 9 + 3 = 12 = 3X4 | 9 - 3= 6 = 2X3 |
| 16+ 4 = 20 = 4X5 | 16 - 4 = 12 = 3X4 |
| 25+ 5= 30 = 5X6 | 25-5 = 20 = 4X5 |
| o | o |
| $m^2 + m = (m + 1)m$ | $m^2 - m = (m - i)m$ |

[1] Si veda p. 101 per il commento a questo passo.

* Gli esempi riportati nel testo mostrano una differenza di uguaglianza unita a una differenza di rapporto. Per l'inverso, confrontare 4, 6 e 6, 9. In entrambi i casi il rapporto è sesquipedale, ma la differenza varia.

IU

Il rapporto doppio si trova tra 6 e 4 come superparticolare; e ancora la differenza tra 9 e 6, come sesquialter, si trova tra 12 e 9 come sesquiterziano, e così via. Ciò che è uguale nella qualità[1] è diverso nella quantità e, all'opposto, ciò che è uguale nella quantità è diverso nella qualità. Ancora, è chiaro che in tutti i loro rapporti[2] 4 la stessa differenza tra due termini sarà necessariamente chiamata frazione con nomi che differiscono di 1, e sarà la metà di uno e il terzo dell'altro, o il terzo di uno e il quarto dell'altro, o il quarto di uno e il quinto dell'altro, e così via.

Ma ciò che più di tutto confermerà il fatto che il dispari, e mai il pari, è la causa preminente dell'uguaglianza, è da dimostrare in ogni serie che inizia con 1 seguendo un qualche rapporto, per esempio il doppio rapporto, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, o il triplo,
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2.187, e quanto volete. Troverete 3 che di necessità che tutti i termini che si trovano nei posti dispari della serie siano quadrati, e nessun altro per nessun motivo, e che nessun quadrato si trovi in un posto pari.

Ma tutti i prodotti di un numero moltiplicato due volte per se stesso, cioè i cubi, che si estendono in tre dimensioni e si vedono accomunati in misura ancora maggiore, sono il prodotto dei numeri dispari, non dei pari[4], 1, 8, 27, 64, 125 e 216, e di quelli che proseguono analogamente, in una progressione semplice e invariata. Infatti, quando i numeri dispari successivi sono disposti all'infinito a partire da 1, osservate questo: Il primo fa il cubo potenziale; i successivi due,

[1] Questa è sostanzialmente una ripetizione dell'affermazione precedente. Nella terminologia di Nicoma- chus due coppie di numeri hanno una relazione (<rx^rn) qualitativamente *(woibrijn)* simile se presentano lo stesso rapporto; numericamente (*-o*6777™), se hanno la stessa differenza aritmetica. Questa terminologia compare nuovamente nella discussione delle proporzioni; cfr. infra, 23, 4.

- Ovvero, il confronto delle coppie di termini delle due serie; si veda il paragrafo 21. 2
per un'ulteriore discussione del significato di crx/<m "relazione". Per illustrare il significato, possiamo prendere coppie di termini omologhi delle due serie, come 1, 2; 4, 6; 9, 12; 16, 20; ecc. e le loro differenze 1, 2, 3, 4, ecc. 1 è l'insieme di 1 e la metà di 2; 2 è la metà di 4 e la terza di 6; 3 è la terza parte di 9 e la quarta di 12, ecc. Oppure, confrontare 4, 2 con 4, 6; 9, 6 con 9, 12; ecc.

* Filone, *De Mundi Opificio*, 36, sottolinea ulteriori proprietà della tavola dei doppi: "Se uno raddoppia, troverà che il terzo dall'unità (cioè contando le due estremità alla maniera greca) è un quadrato, il quarto un cubo, e il settimo, derivante sia dal terzo che dal quarto, un cubo e un quadrato insieme". Analogamente Teone, p. 34, 16 e segg., sottolinea che i termini in ogni altro luogo (non dice specificamente 'dispari') della serie di multipli sono quadrati, quelli in ogni terzo luogo cubi e quelli in ogni quinto luogo sia cubi che quadrati. Aggiunge inoltre che i quadrati sono sempre divisibili per 3 e 4, sia così come sono sia quando si sottrae 1, che quelli divisibili per 3 quando si sottrae 1 sono sempre divisibili per 4 se sono pari, e viceversa, ecc.

[4] Si veda la Parte I, pag. 133.

sommati, il secondo; i tre successivi, il terzo; i quattro successivi, il quarto; i cinque successivi, il quinto; i sei successivi, il sesto; e così via.

## CAPITOLO XXI

1 Dopo di che sarebbe il momento giusto per incorporare la natura delle proporzioni, un elemento essenziale per le speculazioni sulla natura dell'universo e per le proposizioni della musica, dell'astronomia e della geometria, e non da ultimo per lo studio delle opere degli antichi[1], e portare così l'*Introduzione all'Aritmetica* a un termine che sia al tempo stesso adatto e opportuno.

2 Una proporzione,[2] quindi, è in senso proprio la combinazione di due o più *rapporti*, ma secondo la definizione più generale la combinazione di

3

* Due parole greche, droXoyJa e *peabrrjf,* la prima delle quali è usata qui, possono essere tradotte "proporzione", e Nicomaco sottolinea che una *draXoyla* è, in senso stretto, una combinazione di rapporti (come 1, 2, 4; cioè, nella sua classificazione, solo le "proporzioni geometriche "[7], *ytwpur-rptKal draXoylcu* o *fieobrrjret).* In realtà, una progressione aritmetica di tre o quattro termini (ad esempio, 1, 2, 3, o 1, 2, 3, 4) non dovrebbe essere chiamata *&va\oyla,* ma in pratica viene chiamata così. Fino a quando Ncsselmann non ha chiarito la questione *(Geschichte der Algebra,* p. 210, nota) si pensava che *draXoyla* significasse propriamente una proporzione di quattro termini (cioè una proporzione disgiunta; cfr. sezione 6), e *peabr^s* una proporzione continua (di tre termini; cfr. sezione 5). Partendo dalle affermazioni di Iamblichus (pp. 100, 15 e segg. e 104,19 e segg. Pistelli; quest'ultimo passo recita *se Si Stvripa piobryjs* 1*) ycwpcrpitci) tcvplu/s dyaXoyla ninXifrat^ Stbrt Xbyor rbr airrbr ol Spot* drd *rbv aurbp Xbyor StetrT&ret)* e lo stesso Nicomaco (cfr. II. 24. 1), Nesselmann afferma che in origine d*aXo7fa era applicata solo alle proporzioni geometriche e *piaorift* alle altre due, l'armonica e l'aritmetica, ma che nell'uso successivo la distinzione dei termini è scomparsa. È certo che Nicomaco li usa indistintamente per tutti e tre i tipi. Ma il presente passo chiarisce perfettamente la questione se si pone il giusto accento sulle parole Xd-yo" e <rx^nf- Nicomaco qui afferma definitivamente che una proporzione (draXiyy/a) è propriamente o strettamente *(nvplws)* la combinazione di due o più *rapporti (Xbywr),* ma *in senso più generale* (*01- *rbrepor)* una combinazione di *rapporti* ((rx^ew*). Ora, \6yot è il termine che significa propriamente9 rapporto, la misura di un numero in termini di un altro, e non è usato da Nicomaco con riferimento alle relazioni tra numeri in nessun altro senso (egli usa, a dire il vero, *Xbyot* con altri significati, ma non con riferimento alle relazioni tra numeri; si veda il Glossario).

Nicomaco manca indubbiamente di precisione quando definisce Xd7ot (sezione 3), ma nel suo uso è coerente. o-x^u invece significa semplicemente *relazione* e può riferirsi a qualsiasi tipo di relazione, compresa *Xbyot* propriamente detta e anche la semplice eccedenza o carenza numerica; è quindi un termine più generale e talvolta, ma non sempre, sinonimo di Xd-yoi. Qui, però, Nicomaco lo usa in senso generale, in modo da includere la relazione di superamento e di essere superati. Ammette, quindi, che *draXoyla* è usato per le progressioni aritmetiche e armoniche così come per le vere proporzioni, quelle geometriche. Si può notare che nel parlare delle proporzioni aritmetiche Nicomaco non usa il termine XA-yot per descrivere la loro relazione reciproca; infatti dice che non sono nella stessa X670* (II. 23. 1: *Srar . . . pb pirrot \ b yo t b abrbs iv roTt Spots srpbs* dXXifXou* *ylyrjrai).* In II. 22. 3 (4* *ybp* rp row *dwXoD dptSpov <pveiKy dirb pordlos indiano . .* friifercu *b* rai/Tpi *fi&rrjs \6yos*, dove *radrrfS =* rrjs dptBpifTticiji)*

due o più *relazioni,* anche se non sono ricondotte allo stesso rapporto, ma piuttosto a una differenza, o a qualcos'altro.

Ora, un rapporto1 è la relazione di due termini tra loro, e il 3
La combinazione di tali termini è una proporzione, per cui tre è il numero più piccolo di termini che la compongono, anche se può essere una serie di più termini, soggetti allo stesso rapporto o alla stessa differenza. Per esempio, i: 2 è un rapporto, dove ci sono due termini; ma 2 : 4 è un altro rapporto simile; quindi 1, 2, 4 è una proporzione, perché è una combinazione di rapporti, o di tre termini che si osservano essere nello stesso rapporto tra loro. La stessa cosa si può osservare anche in numeri maggiori di 4 e in serie più lunghe di termini; infatti, se un quarto termine, 8, viene unito al precedente dopo 4, sempre in un rapporto simile, il doppio, e poi 16 dopo 8 e così via.

Ora, se lo stesso termine, uno e immutabile, viene confrontato con quelli su 5

*\6yot* non significa "rapporto", ma "schema", "piano" o, in pratica, "definizione". In I. 5. 1 parla di *dpfiopucol \6yot,* cioè gli intervalli dell'armonia, ma solo per sottolineare che si tratta di rapporti in senso stretto.

Una buona illustrazione dell'uso corretto delle parole \6yos e <rx^'* si trova in Teone, p. 22, 19 Hiller: *au(6fjLfpoi* 54TOOS *\5yovt rrjt wp6t* dXXifXov* *atir&p lutovviv* ("mentre aumentano diminuiscono i rapporti tra loro"). Sta parlando del fatto che nella serie naturale dei numeri i rapporti tra i termini diminuiscono man mano che si sale nella serie, ad esempio 2 : i > 3 : 2 > 4:3, ecc. *\´5yos* è il rapporto; significa la relazione generale esistente
tra coppie di termini, cioè il semplice accoppiamento e confronto dei termini. È inoltre da
Per quanto riguarda la terminologia delle proporzioni, si noti che, secondo Iamblico (p. 99, 25 e segg.), *&va\oyla* si riferisce propriamente alla proporzione continua (quella in tre termini), in contrapposizione a r6 *&vd\oyov,* che significa piuttosto una progressione geometrica ed è il termine più corretto da applicare alla proporzione disgiunta (in quattro termini). Inutile dire che questa distinzione non viene osservata da Nicomaco.

[1] Alla luce di quanto detto nella nota precedente, questa definizione non è molto valida, poiché si limita ad affermare che un rapporto *(\6yoj)* è una relazione (<rx6m). Nicomaco è colpevole di negligenza, oppure, come è molto probabile, la parola *Toid* è caduta prima di *<rx4<risf* senza lasciare traccia nei MSS. L'aggiunta di questa parola renderebbe la definizione abbastanza soddisfacente, anche se mancherebbe ancora della precisione di quella di Euclide o di Teone. Nel linguaggio matematico iroid *<rx4<rif* "una relazione di qualche tipo", "una relazione qualitativa", significa una relazione che può essere descritta come "di qualche tipo", cioè doppia, tripla, sesquipedale o simile, in altre parole un rapporto vero e proprio, e si contrapporrebbe a *irocrij* (rx^trif, "una relazione di una certa quantità", che significherebbe una relazione in cui è in questione una semplice differenza aritmetica tra i termini. Euclide utilizza questa terminologia nelle sue definizioni di rapporto e proporzione nel Libro V, *init* "Il rapporto è la relazione qualitativa in riferimento alla grandezza tra due grandezze omologhe. La proporzione è la somiglianza dei rapporti".
**(\6** *yos fori 5 uo fieyeO&p d/jLoycp&p ij /card. TrjXiKdrrfrd* **wota** *(rx^trit. dyaXoyla 5 * 4 <rrly se TUJP \bywp bfwibTjfi)*; cfr. anche Erone di Alessandria, *Definizione* 127, ed. Hultsch, p. 36. Come ha mostrato Nesselmann *(Gesch. d. Alg.y 212),* l'inclusione di *dfioytp&y,* **myXuc^rirra** e *dfioidrrjs* fa emergere punti trascurati da Nicomaco, ma ancora più importante è 1roid. Sulla necessità che i termini di un rapporto siano omogenei, si veda I. 17. 4; Nicomaco trascura la necessità che i termini siano omogenei. 4; Nicomaco trascura questo aspetto. Le definizioni di Teone di rapporto e proporzione sono più simili a quelle di Euclide, ma quella di proporzione è mal formulata o trasmessa erroneamente: "Il rapporto è la relazione qualitativa in analogia (*ar *dvdXoyop)* esistente tra due termini dello stesso genere" (p. 73, 16); "La proporzione è la relazione qualitativa dei rapporti tra loro" (p. 74, 12).

Se la proporzione tra i due lati, il maggiore come conseguente[1] e il minore come antecedente, è detta continua; ad esempio, i, 2, 4 è una proporzione continua per quanto riguarda la qualità[2] , perché 4: 2 è uguale a 2 : 1 , e viceversa 1: 2 è uguale a 2 : 4 . Per quanto riguarda la quantità, r, 2, 3, per esempio, è una proporzione
proporzione continua,[3] perché come il 3 supera il 2, così il 2 supera l'1 e, viceversa, come l'1 è inferiore al 2, di tanto il 2 è inferiore al 3.

6 Se però un termine risponde al termine minore e ne diventa l'antecedente e il maggiore, e un altro, non uguale, prende il posto di conseguente e minore rispetto al maggiore, tale media e tale proporzione non si chiama più continua, ma disgiunta; per esempio, per quanto riguarda la qualità, 1, 2, 4, 8, perché 2 :1 è uguale a 8 :4, e viceversa
1: 2 è uguale a 4: 8, e ancora 1:4 è uguale a 2 :8 o 4:1 è uguale a 8 : 2 ; e in quantità, 1, 2 , 3 , 4, perché come 1 è superato da 2, altrettanto 3 è superato da 4, o come 4 supera 3, così 2 supera 1, e per interscambio, come 3 supera 1, così
4 supera 2, o come 1 è superato da 3, di tanto 2 è superato da 4.

## CAPITOLO XXII

1 Le prime tre proporzioni [4] , riconosciute da tutti gli antichi, Pitagora, Platone e Aristotele, sono quella aritmetica, quella geometrica e quella armonica.

[1] Sul significato di "antecedente" e "conseguente" si veda la nota a I. 19. 2.

* Sul significato di "qualità" riferito ai rapporti, si confronti II. 20. 3. In riferimento alle proporzioni, come in questo caso, il significato è coerente con l'uso precedente. Una proporzione qualitativa (*ard iroidrijra, *tcard T6 wot6P}* Totdriyrt) è una serie di termini che presentano rapporti simili, mentre una proporzione quantitativa (xard *Toabrrrra, K*rh. r6* T<xr6vf *wo<T6r7jTt)* è una progressione aritmetica, con una differenza comune. Cfr. anche II. 22. 2; 23. 4.

[1] < *Tvyrjfi^yrj:* Teone, p. 82, 10, usa il termine <n/**x^** e *dtjjpyjfUyrj per* "disgiunto" (in Nicoma-chus, SicfeirylUrrf, sect. 6).

[4] Iamblico aggiunge a proposito della storia delle proporzioni (p. 100, 19): "Ma anticamente, ai tempi di Pitagora e dei matematici del suo tempo, c'erano solo tre mezzi: l'aritmetico, il geometrico e il terzo in ordine, che un tempo si chiamava subcontrario, ma che le scuole di Archita e di Ippaso cambiarono subito nome in armonico, perché sembrava abbracciare i rapporti che regolano l'armonizzato e l'intonato. E prima era chiamato subcontrario perché il suo carattere era in qualche modo subcontrario all'aritmetica. . . . . Dopo che questo nome fu cambiato, quelli che vennero dopo, Eudosso e la sua scuola, inventarono altri tre mezzi, e chiamarono il quarto propriamente subcontrario perché le sue proprietà erano subcontrarie all'armonico... e gli altri due li chiamarono semplicemente dal loro ordine, quinto e sesto. Gli antichi e i loro successori pensavano che si potesse costituire questo numero, cioè sei, di mezzi; ma i moderni ne hanno trovati altri quattro in aggiunta, ideando la loro formazione a partire dai termini e dagli intervalli". Cfr. anche p. 113, 16 ss. Aggiunge (p. 116, 1 ss.) che i primi sei erano in uso dai tempi di Platone fino a Eratostene, e che gli altri quattro furono ideati da Myonide e Eufranor, entrambi pitagorici, vissuti successivamente. Pare che Moderato di Gades, così come Nicomaco, impiegasse tutte e dieci le forme (cfr. Proclo, *In Tim.*, II. 18. 29 ss. Diehl).

che non hanno un nome proprio, ma si chiamano più genericamente quarta, quinta e sesta forma della media; dopo di che i moderni ne scoprono altre quattro, che formano il numero dieci,[1] che, secondo la visione pitagorica, è il più perfetto possibile.

È proprio in base a questo numero che, non molto tempo fa, si è osservato che le dieci relazioni2 prendono il loro giusto numero, le cosiddette dieci categorie[3] , le divisioni e le forme delle estremità delle nostre mani e dei nostri piedi, e innumerevoli altre cose che noteremo nel luogo appropriato. [4]

Ora, però, dobbiamo trattare fin dall'inizio, in primo luogo, quella forma di proporzione che per quantità5 [*] riconcilia e lega insieme il confronto dei termini, che è un'uguaglianza quantitativa per quanto riguarda la differenza dei vari termini tra loro. Questa sarebbe la proporzione aritmetica, poiché si è già detto che la quantità è la sua caratteristica peculiare. Qual è dunque la ragione per cui tratteremo prima questa e non un'altra? Non è forse chiaro che la Natura lo mostra prima degli altri? Infatti, nella serie naturale dei numeri semplici, a partire dall'1, senza che nessun termine venga superato o omesso, si conserva la definizione di questa sola proporzione; inoltre, nelle nostre precedenti affermazioni[7], abbiamo dimostrato che la stessa *Introduzione aritmetica* è antecedente a tutte le altre, perché le abolisce insieme a sé, ma non è abolita insieme a loro, e perché è implicata da esse, ma non le implica. È quindi naturale che la media che condivide il nome di aritmetica non prenderà irragionevolmente

[1] La sacralità del numero io era uno dei temi preferiti dai Pitagorici, io simboleggiava per loro l'universo, e con la *tctraktys* (i + 2 + 3 + 4 = 10) veniva fatto il loro giuramento più sacro. È la natura onnicomprensiva che essi scoprirono nella decade a guadagnarle una particolare venerazione, e Nicomaco cita qui prove del tipo accettato dalla scuola pitagorica per avvalorare questa proprietà della decade. È bene notare che in altre due fonti nicomachee si trovano affermazioni simili. Il resoconto di Fozio del *Theologumcna Arilhmcticac* rappresenta la decade come l'universo perché ci sono 10 dita delle mani e dei piedi, 10 categorie e xo parti del discorso, e perché comprende tutte le figure solide e piane, tutti i tipi di numero e di relazioni numeriche; e c'è un passo parallelo nel *Theol. Arith* p. 59. Un altro esempio della venerazione tributata alla decade e del suo presunto carattere universale tra i numeri si trova in I. 19. 17 (cfr. la nota). Sul decadimento pitagorico in generale, cfr. Filolao, in Stobeo, £c/., I (Wachsmuth-Hense, vol. I, p. 16); Aristotele, *Mel.,* I 5. 986 a, 8.

[1] Il riferimento è a I. 17. 7-8 e alla discussione che segue.

*Le categorie aristoteliche; cfr. Parte I, p. 95, note 1 e 2. Boezio, II. 42, dice che Archita il Pitagorico distinse per primo le categorie, *licet quibusdam sit ambiguum,* e che Platone seguì la sua distinzione. Sembra che ci sia stato un libro sulle categorie (falsamente) attribuito ad Archytas. Si veda la Parte I, *ibid.*

[4] Sembra un riferimento all'opera *Theologumena Arithmcticae.*

[1] *le note su II 20. 3; 21.5.

[o] 6 *TCLVTT)S pdnnjj \6yo%*; cfr. su II. 2i. 2. [7] Cfr. I. 4. 2 ss. e la nota.

precedenza rispetto ai mezzi che vengono nominati per le altre scienze, la geometrica e l'armonica; è evidente che a maggior ragione avrà la precedenza sui sottocontrari[1] , sui quali i primi tre detengono il primato. In quanto prima e originaria, dunque, poiché è la più meritevole di questo onore, la proporzione aritmetica avrà la sua discussione nelle nostre mani prima delle altre.

## CAPITOLO XXIII

1 Si tratta di una proporzione aritmetica[2], quindi, ogni volta che tre o più termini sono posti in successione, o sono così concepiti, e si riscontra la stessa differenza quantitativa tra i numeri successivi, ma non lo stesso rapporto tra i termini, l'uno rispetto all'altro. Ad esempio, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 1 0 , 1 1 , 1 2 , 1 3 ; infatti, in questa serie naturale di numeri, esaminata consecutivamente e senza omissioni, si scopre che ogni termine si colloca tra due e conserva la proporzione aritmetica con essi. Infatti, le sue differenze rispetto a quelle che si trovano da una parte e dall'altra sono uguali, ma non si conserva lo stesso rapporto tra di esse.

2 E comprendiamo che in una serie di questo tipo si verifica una proporzione continua e una disgiunta; infatti, se lo stesso termine medio risponde a quelli che si trovano da una parte e dall'altra come antecedente e conseguente, si tratterebbe di una proporzione continua, ma se insieme ad esso c'è un altro termine medio, si verifica una proporzione disgiunta.

3 Se da questa serie separiamo tre o più termini consecutivi, secondo la forma della proporzione continua, o quattro o più termini secondo la forma disgiunta, e li consideriamo, la differenza di tutti sarà 1, ma i loro rapporti saranno sempre diversi. Se invece scegliamo di nuovo tre o più termini, non adiacenti, ma separati da un intervallo costante, se si omette un termine nella definizione di ogni termine, la differenza sarà in ogni caso 2; e ancora una volta con tre termini si tratterà di una proporzione continua; con più termini, disgiunta. Se si omettono due termini, la differenza sarà sempre 3 in tutti i casi, continui o disgiunti; se tre, 4; se quattro, 5; e così via.

4 Tale proporzione,[3] quindi, partecipa in egual misura alla sua

[1] Cioè le forme "quarta, quinta e sesta". I primi tre sono i "capi" dei sottocontrari perché questi ultimi si basano su di essi.

[2] Cfr. la definizione in Teone, p. 113, 18 ss. [3] Cfr. su II. 20. 3; 21. 5 ; 22. 2.

differenze, ma di qualità disuguale; per questo è aritmetica.
Se invece fosse di qualità simile, ma non di quantità, sarebbe geometrico anziché aritmetico.

Questa proporzione ha una particolarità[1] che non appartiene a nessun'altra: la media è la metà o è uguale alla somma degli estremi, sia che la proporzione sia considerata continua o disgiunta o alternata; infatti, o il termine medio con se stesso, o i termini medi tra loro, sono uguali alla somma degli estremi.

Ha un'altra particolarità: il rapporto che ogni termine ha con se stesso,[2] è uguale a quello che le differenze hanno con le differenze, cioè sono uguali.

Inoltre, la cosa più esatta e che è sfuggita alla maggioranza[3] , il prodotto degli estremi rispetto al quadrato della media risulta essere più piccolo del prodotto delle differenze, siano esse 1, 2, 3, 4 o qualsiasi altro numero.

In quarto luogo[4], cosa che hanno notato anche tutti gli scrittori precedenti, i rapporti tra i termini minori sono maggiori rispetto a quelli tra i termini maggiori. Si dimostrerà che nella proporzione armonica, al contrario, i rapporti tra i termini maggiori sono maggiori di quelli tra i termini minori; per questo motivo la proporzione armonica è in contrasto con l'aritmetica, e la proporzione armonica è in contrasto con l'aritmetica.

[1] La traduzione segue la lettura di Ast (TA /card *oruvdeortr* rwr *&Kputv bur\d<r tov rod fUaov ij tcrov roU pivots* elvcu). In forma algebrica, e ponendo $a > b > c > d$, le proposizioni di questa sezione sono:

I. (1) $a - b = c - d$, o (2) $a - b = b - c$ (*forme* atipiche *della progressione),*

*quindi* II. (1) $a + d = b + c$, *oppure* (2) $a + c = 2b$.

Ma se I è dato, è evidente che anche i seguenti sono veri:

III. $a - c = b - d$ *(per alternanza)*,

*allora* IV. $a + d = b + c$.

La proposizione è notata da Teone, *loc. cit.*, e dallo stesso Nicomaco nel suo *Manuale di musica* (c. 8, p. 251, 13 Von Jan).

[2] Boezio, IT. 43 : *Namque omnis terminus sibi aequalis est et differentiae differentiis sunt aequales*.

[3] Boezio, II. 43, dice che questo fu scoperto da Nicomaco. In generale questa proposizione può essere enunciata: se $a - b = b - c$, $b^2 - ac = (a - b)(b - c) = (a - b)^2 = (b - c)^2$. Nicomaco nel suo *Manuale di musica* (c. 8, p. 251, 15, Von Jan) menziona nuovamente questa proprietà della proporzione.

[4] Così nella serie 1, 2, 3, confrontando il rapporto tra i termini minori (1,2) e quello maggiore (2), 3),

$$2 : 1 > 3 : 2.$$

Ma in un confronto analogo tra i termini della progressione armonica 3, 4, 6,

$$4 : 3 < 6 : 4.$$

In progressione geometrica, come 1, 2, 4,

$$2 : 1 = 4 : 2 ,$$

come dice Nicomaco. Nicomaco afferma che questo fatto era stato notato da tutti gli scrittori precedenti. L'affermazione è confermata dal fatto che ricorre già in Archytas (frammento 2, Diels, *Die Fragmente dcr Vorsokratiker*, I1 , p. 334, in Porphyry, *In Ptol. Harm.*, p. 267). Per la sua enunciazione da parte di Archytas, si veda p. 21, dove è citato.

La V geometrica è a metà strada tra loro, per così dire, tra gli estremi, perché questa proporzione ha i rapporti tra i termini maggiori e quelli tra i minori uguali, e abbiamo visto che l'uguale si trova nella terra di mezzo tra il maggiore e il minore. Questo per quanto riguarda la proporzione aritmetica.

## CAPITOLO XXIV

La proporzione 1 successiva a questa, quella geometrica, è l'unica in senso stretto a poter essere chiamata proporzione, perché i suoi termini sono visti nello stesso rapporto. Esiste ogni volta che, su tre o più termini, come il più grande sta al successivo più grande, così quest'ultimo sta a quello che lo segue, e se ci sono più termini, come questo sta a quello che lo segue, ma non differiscono tra loro per la stessa quantità, bensì per la stessa qualità del rapporto, il contrario di quanto si è visto per la proporzione aritmetica.
A titolo di esempio, si riportano i numeri che iniziano con 1 e che avanzano per il doppio rapporto, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, e così via, o per il triplo rapporto, 1, 3, 9, 27, 81, 243, e così via, o per il quadruplo, o in modo simile. In ognuna di queste serie, tre termini adiacenti, o quattro, o qualsiasi numero si possa prendere, daranno la proporzione geometrica l'uno all'altro; come il primo è al successivo più piccolo, così è quello al successivo più piccolo, e ancora quello al successivo più piccolo, e così via fino a che si vuole andare avanti, e anche per alternanza. Per esempio, 2, 4, 8; il rapporto tra 8 e 4 è uguale a quello tra 4 e 2, e viceversa; non hanno però la stessa differenza quantitativa. Ancora, 2, 4, 8, 16; perché non solo il 16 ha lo stesso rapporto con l'8 di prima, ma non la stessa differenza, ma anche per alternanza conserva una relazione simile - come il 16 sta al 4, così l'8 sta al 2, e viceversa, come il 2 sta all'8, così il 4 sta al 16; e in forma disgiunta, come il 2 sta al 4, così l'8 sta al 16; e viceversa e in forma disgiunta, come il 16 sta all'8 così il 4 sta al 2; perché ha il doppio rapporto.
La proporzione geometrica ha una proprietà peculiare, che non è condivisa da nessun'altra, ovvero che le differenze dei termini2 sono nello stesso rapporto di

[1] dvaXoyla: Cl. Theon, pp. 107, 5 e 114, 1 ss. su questa proporzione. Euclide definisce i numeri in proporzione come segue: "I numeri sono in proporzione quando il primo è lo stesso multiplo del secondo come il terzo del quarto, o la stessa parte di esso, o le stesse parti" *(dpiBpuol dvd\oy6v tie tv 6rav 6 wpCrrot* roO $<tnipov *Kal 6 rplrot rod rerdprov ladius* § *ToWawXdffios fj* *T6* <21rr6 *pipoz j* rd *airrd p.* 4prj *watv), Elementi*, VII, *Def.* 21.

[2] Così nella serie i, 2, 4, 8, 16, il rapporto è doppio e il rapporto tra i successivi le differenze (i, 2, 4, 8) sono anch'esse doppie.

come i termini a quelli adiacenti, il maggiore al minore, e viceversa. Un'altra proprietà è che i termini maggiori hanno come differenza, rispetto ai minori, i termini minori stessi, e allo stesso modo la differenza differisce dalla differenza, per la differenza minore stessa, se i termini sono disposti nel doppio rapporto; [1] nel triplo rapporto entrambi i termini e le differenze avranno come differenza il doppio del successivo minore, nel quadruplo rapporto il triplo, nel quintuplo il quadruplo, e così via.

Le proporzioni geometriche si realizzano non solo tra i multipli, **4** ma anche tra tutte le forme superparticolari, superparticolari e miste, e in tutti i casi si conserva la proprietà peculiare di questa proporzione, che nelle proporzioni continue il prodotto degli estremi è uguale al quadrato della media, ma nelle proporzioni disgiunte, o con un numero maggiore di termini, [2] anche se non sono continue, ma con un numero pari di termini, che il prodotto degli estremi è uguale a quello della media.

A dimostrazione del fatto che in tutti i rapporti, in tutti i tipi di multipli, di superparticolari, di superparti e di rapporti misti si conserva la proprietà peculiare di questa proporzione, ci basti3 e ci sia sufficiente il fatto che abbiamo modellato, a partire dall'uguaglianza, con le tre regole tutti i tipi di disuguaglianza l'uno dall'altro, sia in ordine diretto che inverso; Infatti, ogni atto di formazione e ogni serie che viene presentata è una proporzione geometrica con tutte le proprietà sopra menzionate e una quarta, cioè che mantengono lo stesso rapporto4 sia nei termini maggiori che in quelli minori. Inoltre, se esponiamo le serie condivise da numeri eteromeci e quadrati, uno per uno,

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [1] Doubles | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
| Differences | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | |
| Differences of differences | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | | |

In general, $2^{n+1} - 2^n = 2^n$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Triples | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 |
| Differences | 2 | 6 | 18 | 54 | 162 | 486 | |
| Differences of differences | 4 | 12 | 36 | 108 | 324 | | |

In general, $3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadruples | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1,024 | 4,096 |
| Differences | 3 | 12 | 48 | 192 | 768 | 3,072 | |
| Differences of differences | 9 | 36 | 144 | 576 | 2,304 | | |

In general, $4^{n+1} - 4^n = 4^n(4 - 1) = 3 \times 4^n$

[2] Thus in the series 2, 4, 8, 16, 32, 64

$$2 \times 64 = 4 \times 32 = 8 \times 16 \ (= 128).$$

•Cfr. I. 23.7 e segg.

[4] Cioè, nella serie dei doppi (1, 2, 4, 8, 16, 32, ecc.) il rapporto tra 32 e 16 è lo stesso come quello tra 2 e 1.

Se si selezionano i termini di entrambe le serie, e poi si selezionano i termini per gruppi di tre a partire da i, li si esamina, ponendo in ogni caso l'ultimo del primo gruppo come punto di partenza del successivo, si scoprirà che dalla relazione multipla - cioè il doppio - compaiono uno dopo l'altro tutti i tipi di superparticolari 1, il sesqui-alter, il sesquiterziano, il sesquiquartano, e così via.

6 Ora che siamo arrivati a questo punto, sarebbe opportuno citare un corollario che ci è utile per un certo teorema platonico: [2] i numeri piani sono sempre legati da un'unica media, i solidi da due, sotto forma di proporzione. Infatti, con due numeri consecutivi

[1] La serie dei numeri quadrati ed eteromorfi è 1, 2, 4, 6, 9,12,16, 20, 25, ecc. Prendendoli a gruppi di tre come indicato, appaiono i seguenti rapporti:

| | |
|---|---|
| 1, 2, 4 | (doppio) |
| 4, 6, 9 9, | (sesquialter) |
| 12, 16 16, | (sesquitertian) |
| 20, 25 | (sesquiquartan) |

* Il riferimento è al *Timeo*$_{y}$ 32 A-B, e Nicomaco si sforza di chiarire una difficoltà reale del testo platonico. Nell'esporre il caso come fa all'inizio in modo breve e sommario ("i piani sono sempre uniti da una media, i numeri solidi da due"), cita senza dubbio a memoria, perché non riporta Platone con precisione. Platone non dice che i piani possono avere una sola media, ma che ne basta una. Ma Nicomaco, continuando a limitare l'applicazione di questi due principi ai *quadrati consecutivi* e ai *cubi consecutivi*, sembrerebbe cercare di imporre al passo platonico un'interpretazione che regga al vaglio della matematica.

Le parole usate da Platone, *ixlTeSor* e *orepebv,* possono essere interpretate in modo molto ampio e quindi sorgerebbero delle difficoltà. Per esempio, un numero piano potrebbe essere qualsiasi numero della forma *ab*$_{t}$ e supponendo che *a*, 6, c e *d* siano numeri interi primi, sarebbe impossibile trovarne uno razionale

La media tra i numeri piani *ab* e *cd*$_{f}$ per Vabed sarebbe irrazionale. Tuttavia, sarebbe sempre possibile trovare un'unica media tra due quadrati successivi, poiché se i quadrati sono *a1* e (a + i)*> $^{a}$($^{a}$ + 1) sarà una media geometrica tra di essi. Inoltre, l'affermazione di Nicomaco sui cubi aiuta a eliminare una difficoltà reale nella seconda parte del teorema platonico, perché ci sono alcuni numeri solidi che possono essere messi in una proporzione geometrica con una sola media (ad esempio, Archer-Hind, *ad loc.*$_{t}$ cita 8, che è 2s, e 512, che è 8*, e la proporzione 8: 64 = 64: 512). Ma se per numeri solidi Platone intendeva cubi consecutivi, come dice Nicomaco, allora si scoprirà che tra due di essi non si può inserire un'unica media geometrica razionale.

Infatti, se i cubi sono a3 e (a + i)$^{3}$, la media geometrica sarebbe *a(a* + i)Va(a + 1) e sarebbe irrazionale.

Per mano dei commentatori moderni il passo platonico è stato sottoposto a una restrizione simile. Archer-Hind, nella sua nota, segue in gran parte Martin e si dichiara convinto che Platone intendesse e *orepebv* nel senso più stretto possibile, il primo un numero di due soli fattori, il secondo di tre, tutti i fattori sono numeri interi primi, e che nel caso dei numeri solidi si limita ai cubi. Allora sarebbe sempre possibile trovare una media geometrica tra due quadrati (come *a1: ab = ab: b?)*$_{9}$ anche se in altri numeri piani potrebbero essere possibili due medie; e la possibilità di due cubi con una sola media geometrica razionale sarà esclusa, perché se *x* è la media tra *a1* e ft3, avrà il valore irrazionale *obVab, essendo a* e *b* numeri interi primi.

quadrati[1] si scopre un solo termine medio che conserva la proporzione geometrica, come antecedente al termine minore e conseguente al termine maggiore, e mai più di uno. Per questo motivo concepiamo due intervalli[2] tra il termine medio e ciascun estremo, nella relazione di rapporti simili. Ancora, con due cubi consecutivi[3] si trovano solo due termini medi in rapporto corretto, secondo la proporzione geometrica, mai di più; quindi ci sono tre intervalli, uno, quello tra i termini medi confrontati tra loro, e due tra gli estremi e i medi da una parte e dall'altra.

Così le forme solide sono chiamate 8 tridimensionali e quelle piane bidimensionale; ad esempio,

1 e 4 sono piani, e 2 un termine medio in proporzione, o ancora 4 e 9, due quadrati, e il loro termine medio 6, tenuto dal termine maggiore e dal termine minore nello stesso rapporto[4] in cui una differenza tiene l'altra. La ragione[6] di ciò è che i lati dei due quadrati, di cui uno 9 appartiene in modo peculiare a ciascuno di essi, hanno prodotto insieme proprio questo numero 6. Nei cubi, invece, ad esempio 8 e 27, si trovano non più uno ma due termini medi, 12 e 18, che si pongono insieme ai termini

[1] Cfr. Euclide, *Elementi*, VIII, n : "C'è un termine medio in proporzione tra due numeri quadrati, e il quadrato ha al quadrato il doppio del rapporto tra lato e lato" (Mo *rrrpaywpvp dpidpuv clt pJeos dpd\oy6p deny dpidubt, KCLI 6 rcrpdyufvot irp6i rbv rrrpdyu)POP* 5irXa<rlova *\6yop*

ffr*p ft xXfupd 1rp6s *TTJP wXevpdp)*. Teone di Smirne non include questa proposizione, né la seguente, relativa ai cubi; ciò è strano, dal momento che si professa un aiuto allo studio di Platone. -

[2] *diaerdi/MLra*: Il termine greco può essere tradotto anche con [1] intervalli. [1] Sul significato della parola in questo contesto, cfr. II. 6. 3. Queste differenze si rifletteranno sul rapporto tra i termini (cfr. supra, § 3).

[3] Cfr. Euclide, *Elementi*, VIII, 12: "Ci sono due termini medi nella proporzione tra due cubi, e il cubo deve cubare tre volte il rapporto tra lato e lato" (Mo*K vpwp dpiOfxufp* Mo pArot *drd\oy6p elcip dpiSpol, xal 6 ictifiot wpbs T6P K6(*3OP *rptvXaeiopa \6yop $x€l* 4wtP ft irXcitpd *wpbt* rftr *wXevpdp)*. [4] In generale, una proporzione tra quadrati successivi sarebbe *d*:a(a* + 1) = *a(a* + 1): (a + i)[f].

Il rapporto tra i lati sarebbe *a: a* + 1. Le differenze su entrambi i lati sarebbero o* + o " o* =* o, e a1 + + - fl = a + i. Quindi le differenze hanno lo stesso rapporto come i termini stessi. In questo tipo di proporzione gli unici "intervalli" sono quelli tra il primo e il medio termine e tra il medio e l'ultimo termine, mentre in qualsiasi proporzione con cubi come estremi, come *a%*: *m - n :bP,* ce ne sono tre, tra a3 e m, m e ", e n e 6*. È da notare che la stessa parola, 6idarrffia*t* può essere tradotta "intervallo" e "dimensione" parlando di quadrati o cubi geometrici. Per i pitagorici questa coincidenza avrebbe avuto un grande significato.

[6] Se ad esempio i cubi sono a* e fc3, la proporzione può essere della forma a3: *alb* = *a*b*: *abl * abP:V* il rapporto costante è *a*: *b}* e la parete delle differenze è a3 - a*6, *a'b* - a^2 e *abl* - *b3*. Ma (a3 - a*6)(aft* - ft3) = (a3ft - jft2)[1]. Le differenze possono quindi essere messe in proporzione continua

o 3- q* f
t
alft - aft2

che si riduce a -- aft2 - ft3 ft

Cioè, il rapporto tra le differenze è uguale a quello tra i termini. Nel caso di cubi di numeri primi, ci sarebbero altre otto possibili forme della proporzione, che obbediscono tutte a questa legge, come si può facilmente verificare. Se, invece, i numeri di partenza non sono primi, il numero di forme aumenta con il numero di fattori.

nello stesso rapporto che le differenze hanno tra loro; e la ragione di ciò è che i due termini medi sono i prodotti dei lati dei cubi mescolati, 2 per 2 per 3 e 3 per 3 per 2.

10 In generale, quindi, se un quadrato prende un quadrato, cioè lo moltiplica, fa sempre un quadrato; ma se un quadrato moltiplica un numero eteromeccanico, o viceversa, non fa mai un quadrato; e se il cubo moltiplica il cubo, il risultato sarà sempre un cubo, ma se un numero eteromeccanico moltiplica un cubo, o viceversa, il risultato non sarà mai un cubo. Allo stesso modo, se un numero pari moltiplica un numero pari, il prodotto è sempre pari e se il dispari moltiplica il dispari sempre dispari; ma se il dispari moltiplica il pari o il dispari il prodotto è sempre dispari.

11 anche dispari, il risultato sarà sempre pari e mai dispari. [1] Queste questioni riceveranno la loro giusta delucidazione nel commento a Platone,[2] con riferimento al passo sul cosiddetto numero nuziale nella *Repubblica* introdotto nella persona delle Muse. Passiamo quindi alla terza proporzione, la cosiddetta armonica, e analizziamola.

## CAPITOLO XXV

1 La proporzione che si colloca nel terzo ordine è quella detta armonica,[3] che esiste ogni volta che tra tre termini si osserva che la media non è nello stesso rapporto con gli estremi, antecedente dell'uno e conseguente dell'altro, come nella proporzione geometrica, né con intervalli uguali, ma con una disuguaglianza di rapporti, come nella proporzione geometrica.

[1] Le proposizioni qui enunciate sono:

(1) m*nJ è sempre un quadrato;
(2)+1) non è mai un quadrato;
(3) *ntn** è sempre un cubo;
(4) *nt?n(n* + i) non è mai un cubo;
(5) 2 m X 2 *n* è sempre pari;
(6) (2 *m dt* i)(2 *n* d= 1) è sempre dispari;
(7) 2 m(2 *n* ± 1) è sempre pari.

(1) $m^2n^2$ is always a square;
(2) $m^2n(n+1)$ is never a square;
(3) $m^3n^3$ is always a cube;
(4) $m^3n(n+1)$ is never a cube;
(5) $2m \times 2n$ is always even;
(6) $(2m \pm 1)(2n \pm 1)$ is always odd;
(7) $2m(2n \pm 1)$ is always even.

* La formula per il numero [1] del matrimonio si trova nella *Repubblica,* 546 A e seguenti. Il significato del passo è ancora controverso. Nicomaco potrebbe forse riferirsi a qualche sua opera in cui commentava la *Repubblica.*

* Iamblico (p. 100,19 ss.) la nomina tra i tre tipi di proporzione noti a Pitagora e alla sua scuola, da cui era chiamata *vwcvarrlcL* perché ritenuta subalterna all'aritmetica; il nome, però, è stato cambiato in armonica, scuole di Archita e Ippaso, perché vi trovarono i rapporti armonici. Iamblico aggiunge (p. 108, 3 ss.) che le forme fondamentali *(wvdfUt*s)* di questa proporzione sono 2, 3, 6 e 3, 4, 6, i cui multipli o superparticolari forniscono altri esempi. A causa di questa limitazione, alcuni hanno dato alla proporzione armonica il nome di "fissa", "stabilita" *(iarrjKvia).* Si noterà che Nicomaco utilizza gli esempi citati, pur non parlando di tale limitazione.

aritmetica, ma al contrario, come il termine più grande sta al più piccolo, così la differenza tra il termine più grande e quello medio sta alla differenza tra il termine medio e quello più piccolo. [1] Per esempio, prendiamo 3, 4, 6, o 2, 3, 6. Infatti, 6 supera 4 di un terzo di se stesso, poiché 2 è un terzo di 6, e 3 è inferiore a 4 di un terzo di se stesso, poiché 1 è un terzo di 3. Nel primo esempio, gli estremi sono in doppio rapporto e le loro differenze con il termine medio sono di nuovo nello stesso doppio rapporto l'uno con l'altro; ma nel secondo sono ciascuno in triplo rapporto.

Ha una proprietà peculiare, opposta, come abbiamo detto,[2] a quella della proporzione aritmetica, perché in quest'ultima3 i rapporti erano maggiori tra i termini minori e minori tra i termini maggiori. Qui, invece, quelli tra i termini maggiori sono maggiori e quelli tra i termini minori minori, cosicché nella proporzione geometrica, come una media tra di essi, si può osservare l'uguaglianza dei rapporti da una parte e dall'altra, una zona intermedia tra maggiore e minore.

Inoltre, nella proporzione aritmetica4 si vede che il termine medio è più grande e più piccolo di quelli ai suoi lati della stessa frazione di se stesso, ma di frazioni diverse dei termini che lo affiancano; nell'armonica, invece, è il contrario, perché il termine medio è più grande e più piccolo dei termini ai suoi lati di frazioni diverse di se stesso, ma sempre della stessa frazione dei termini ai suoi lati, di una metà o di un terzo; ma la geometrica,5 come se fosse in mezzo a loro,

[1] La formula generale è quindi *a:c = a - b:b - c*. Per la discussione di Teone si veda p. 114, 14 e seguenti, Hiller.

[2] Cfr. II. 23. 6. Iamblichus (p. n. 18 e segg.) dice che questa era l'opinione dei pitagorici, ma che alcuni consideravano la proporzione armonica contraria sia all'aritmetica che alla geometrica. Quindi argomenta in modo elaborato l'opinione espressa nel testo, secondo cui è contraria solo all'aritmetica.

* Confrontare i rapporti dei termini della serie armonica 3,4,6 e della serie aritmetica 3,4,5 :

} (minore) f= ij (maggiore)

£ = ij(maggiore) £= i£ (minore)

[4] I seguenti esempi illustreranno il significato di Nicomaco.

$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ (less) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ (greater)

$\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ (greater) $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ (less)

[4] The following examples will illustrate Nicomachus's meaning.

| | Arithmetic | Harmonic | Geometric |
|---|---|---|---|
| Series . . . . . . . . . . . . . . | 3, 4, 5 | 3, 4, 6 | 4, 6, 9 |
| Differences . . . . . . . . . . . . | 1, 1 | 1, 2 | 2, 3 |
| Which are the following fractions of the mean | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ |
| And the following fractions of the extremes | $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ |

In ogni caso ci sono due differenze. Queste sono: *(a)* nell'aritmetica, la stessa frazione del termine medio, ma frazioni diverse degli estremi; (*b*) nell'armonica, frazioni diverse degli estremi. media, ma la stessa frazione degli estremi; (c) nel geometrico, frazioni diverse sia della media che degli estremi.

* Cosa si intende con l'affermazione ellittica del testo, "il geometrico ... non è solo nella media, né solo negli estremi, ma sia nella media che negli estremi", si può vedere dall'esempio della nota precedente. Il termine medio non si differenzia da entrambi gli estremi per lo stesso motivo.

non mostra questa proprietà né esclusivamente nel termine medio né negli estremi, ma sia nella media che negli estremi.

4 Ancora una volta, la proporzione armonica ha come proprietà peculiare il fatto che quando gli estremi vengono sommati[1] e moltiplicati per la media, si ottiene il doppio del prodotto di se stessi moltiplicati l'uno per l'altro.

5 La proporzione armonica è stata così chiamata perché la proporzione aritmetica si distingueva per la quantità, mostrando un'uguaglianza sotto questo aspetto con gli intervalli da un termine all'altro, e la geometrica per la qualità, dando relazioni qualitative simili tra un termine e l'altro, ma questa forma, in riferimento alla relatività, appare ora in una forma, ora in un'altra, né esclusivamente nei suoi termini né esclusivamente nelle sue differenze, ma in parte nei termini e in parte nelle differenze; Infatti, come il termine più grande sta al più piccolo, così la differenza tra il termine più grande e il successivo più grande, o medio, sta alla differenza tra il termine più piccolo e il termine medio, e viceversa.

## CAPITOLO XXVI

1 Nella classificazione dell'Essere precedentemente esposta abbiamo riconosciuto il relativo[2] come un elemento peculiare della teoria armonica; ma anche i rapporti musicali degli intervalli armonici si trovano piuttosto in questa proporzione. Il più elementare è il diatessaron, nel rapporto sesquiterziano, 4 : 3 , che è il rapporto di termine a termine[3] nell'esempio del rapporto doppio, o di differenza a differenza in quello che segue, il triplo, poiché queste differenze sono di 6 a 2 o di nuovo di 6 a 3. Subito dopo c'è il diapente, che è il sesquialter, 3 : 2 o ancora, 6 : 4, il rapporto di

parte di se stesso né dalla stessa parte degli estremi; ma dal primo termine della stessa frazione di se stesso della frazione dell'ultimo termine per la quale differisce da quest'ultimo; e viceversa, l'uguaglianza e la differenza della frazione coinvolta nel confronto dei termini non risiedono, in questo tipo di proporzione, esclusivamente nei rapporti con il termine medio o in quelli del termine medio con gli estremi.

[1] Quindi in 2, 3, 6, (2 + 6) X 3 [3] 24 e 2 X 2 X 6 .

In generale - = $\frac{a - b}{c\ b -}$ da cui $b$ =2 $\frac{ac\ a}{+ c}$ e J>(a + $c$) = 2 $ae$.

* Vedi I. 3.

x.

[8] Gli esempi a cui si fa riferimento sono le proporzioni armoniche citate in II. 25. 1. La proporzione in doppio rapporto è 3, 4, 6, e quella in triplo rapporto è 2, 3, 6. I primi due termini sono in rapporto sesquiterziano nel primo (4:3) e le differenze di 6 con 2 e 3 rispettivamente (4, 3) danno lo stesso rapporto nel secondo.

termine a termine. [1] Poi la combinazione[2] di entrambi, sesquialter e sesquitertian, il diapason, che viene dopo, è nel doppio rapporto, 6 : 3 m entrambi gli esempi, il rapporto di termine a termine. [3] L'intervallo successivo, quello del diapason e del diapente insieme,[4] che conserva il triplo rapporto dei due insieme, poiché è la combinazione di doppio e sesquialter, è come 6 : 2 , il rapporto di termine a termine nell'esempio in triplo rapporto, e allo stesso modo di differenza a differenza nello stesso, e nella proporzione con doppio rapporto è il rapporto del termine maggiore alla differenza tra quel termine e il termine medio, o della differenza tra gli estremi alla differenza tra i termini minori. L'ultimo e più grande intervallo, il cosiddetto diapason, per così dire il doppio del doppio, che si trova nel rapporto quadruplo,[6] è come il termine medio nella proporzione in rapporto doppio alla differenza tra i termini minori, o come la differenza tra gli estremi, nell'esempio in rapporto triplo, alla differenza tra i termini minori.

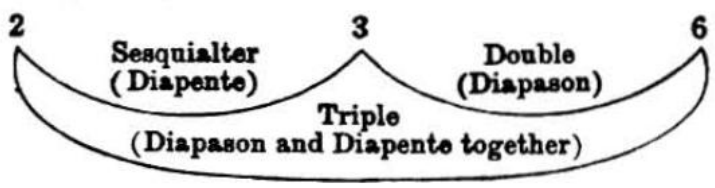
Alcuni, tuttavia, concordando con Filolao, ritengono che la proporzione si chiami armonica perché si riferisce a tutta l'armonia geometrica, e dicono che "l'armonia geometrica" è il cubo perché è armonizzato in tutte e tre le dimensioni, essendo il prodotto di un numero tre volte moltiplicato insieme. Infatti, in ogni cubo questa proporzione si rispecchia; in ogni cubo ci sono 12 lati, 8 angoli e 6 facce; quindi l'8, la media tra il 6 e il 12, è secondo la proporzione armonica, perché come gli estremi sono l'uno per l'altro, così lo è la differenza tra il massimo e il minimo.

[1] Cioè, il rapporto sesquialter può essere derivato dai termini delle due proporzioni armoniche citate senza chiamare in causa le differenze. 6: 4 deriva dal rapporto doppio; 3:2, dal triplo.

[1] Cfr. II. 5. 2.

[1] In entrambe le serie (2, 3, 6 e 3, 4, 6) il diapason ricorre tra i termini (3:6).

[1] Questo, un rapporto triplo, si vede nella serie armonica tripla 2, 3, 6 (a) nei termini 6 e 2; *(b)* nelle differenze (6 - 3=3 e 3 - 2 = 1); e nella serie doppia 3, 4, 6 (a) nel rapporto tra 6 e (6 - 4), cioè 2, e (*b*) nel rapporto tra la differenza di 6 e 3 e quella tra 4 e 3. Sul rapporto triplo come combinazione del doppio e del sesquialter, cfr. II. 5. 4. La serie armonica 2, 3, 6 è del tipo che Nicomaco ha utilizzato come illustrazione in II. 5, come si può vedere dalla seguente disposizione:




[1] Nella serie doppia 3, 4, 6, è il rapporto tra 4 e (4 - 3 = ) 1; nella tripla, 2, 3, 6, è il rapporto tra (6 - 2 =) 4 a (3 - 2 =) 1.

• Nicomaco mostra innanzitutto che questa serie, 6, 8, 12, è conforme a tutte le prove della proporzione armonica appena enunciate, e poi che tutti i rapporti degli intervalli armonici si trovano tra i suoi termini e le sue differenze.

Il termine medio è maggiore del termine minore di una frazione di se stesso e di un'altra è minore del termine maggiore, ma è maggiore e minore di una stessa frazione degli estremi. E ancora, la somma degli estremi moltiplicata per la media fa il doppio del prodotto degli estremi moltiplicati insieme. Il diatessaron si trova nel rapporto 8 : 6, che è sesquiterziano, il diapente in 12 : 8, che è sesquialter; il diapason, la combinazione di questi due, in 1 2 : 6 , il rapporto doppio; il diapason e il diapente combinati, che è triplo, nel rapporto tra la differenza degli estremi e quella dei termini minori, e il didiapason è il rapporto tra il termine medio e la differenza tra se stesso e il termine minore. Più propriamente, quindi, è stato chiamato armonico.

## CAPITOLO XXVII

Come nella divisione del canone musicale[1] , quando si tende una sola corda o si usa un tubo di una sola lunghezza, con estremità inamovibili, e si sposta il punto medio nel tubo per mezzo dei fori delle dita, nella corda per mezzo del ponte, e come in un modo o nell'altro si possono produrre le suddette proporzioni, aritmetiche, geometriche e armoniche, in modo che risulti evidente che esse sono logicamente2 e propriamente denominate, poiché si ottengono cambiando e spostando il termine medio in modi diversi, così è ragionevole e possibile inserire il termine medio che si adatta a ciascuna delle tre proporzioni tra due termini aritmetici, che rimangono fissi e non cambiano, sia che siano entrambi pari o dispari. Nella proporzione aritmetica questo termine medio è quello che supera ed è superato da una quantità uguale; nella proporzione geometrica si differenzia dal termine medio che è il termine medio.

[1] L'*uovoticb era* un'asta di misura corrispondente al monocordo e posta al suo fianco, sulla quale, per mezzo di un ponte mobile, si facevano esperimenti per determinare con precisione gli intervalli musicali, utilizzando la matematica anziché l'orecchio. La procedura di tali esperimenti può essere desunta da Boezio, *Inst. Mus.*} IV. 5: *Sit chorda intensa AB. Huic aequa sit regula, quae propositis parlitionihus dividatur, ut ca regula chordae apposite eaedem divi-siones in nervi longitudine signetUur quas antca signaveramus in regula. Nos vero nunc ita dividimus quasi ipsam chordam et non regulam pariiamur.* Descrive poi l'effettiva divisione. A quanto pare, esperimenti simili potevano essere fatti su una canna del flauto. La parola usata da Nicomaco per * ponte/ *vTaywycfa,* è propriamente riferita a un ponte mobile, in contrapposizione a uno fisso *(/Aay&i*); Ast nella sua nota al presente passo cita uno scolio di Tolomeo, ffarm, I. 8: *fiay&t ij fiij dyofjJyrj, inraywycbt 6 dy6^€vosm KaTaxpyCTiKW* xal furyd" X^yercu *xnraywyevt*. L'espressione dwwi xararo^tj è il titolo di un'opera di Euclide.

[2] Si chiamano cioè propriamente *tuebryp-tt* ("mezzi") perché il termine medio, *tUeot* Jpor, ne determina il carattere.

estremi dello stesso rapporto, e nell'armonica è maggiore e minore degli estremi della stessa frazione di questi stessi estremi.

Siano dati quindi, innanzitutto, due termini pari, tra i quali dobbiamo trovare come si inseriscono i tre mezzi e quali sono. Siano essi 10 e 40.

In primo luogo, quindi, adatto loro la media aritmetica. È 25, e le proprietà at- 3 tendenti della proporzione aritmetica sono tutte conservate; infatti, come ogni termine è a se stesso, così anche la differenza è alla differenza; sono quindi in uguaglianza. E quanto il maggiore supera il medio, tanto quest'ultimo supera il minore; la somma degli estremi1 è il doppio della media; il rapporto dei termini minori2 è maggiore di quello dei maggiori; il prodotto degli estremi3 è minore del quadrato della media della quantità del quadrato delle differenze; e il termine medio4 * è maggiore e minore degli estremi della stessa frazione di se stesso, ma di frazioni diverse considerate come parti degli estremi.

Se, tuttavia, inserisco 20 come media tra i termini pari dati, il 4
Le proprietà della proporzione geometrica vengono in evidenza e quelle dell'aritmetica vengono eliminate. Infatti, come il termine maggiore sta al termine medio, così il termine medio sta al minore; il prodotto degli estremi è uguale al quadrato della media; si osserva che le differenze sono tra loro nello stesso rapporto dei termini; né nei soli estremi6 né nel solo termine medio risiede l'uguaglianza della frazione interessata all'eccesso e alla carenza relativi dei termini, ma nel termine medio e in uno degli estremi a turno; e sia tra i termini maggiori che tra quelli minori c'è lo stesso rapporto.

Ma se scelgo 16 come media, di nuovo le proprietà delle due precedenti 5 proporzioni scompaiono e rimangono quelle dell'armonica.

* 25* - (10 X 40) = 225 = 15*.

[4] Poiché la differenza numerica è costante, ne consegue che la media è sia superata che eccedente della stessa frazione di se stessa (i.c., o $). Ma 15 rispetto agli estremi è f di 10 e g di 40.

[1] Le differenze nella serie $io_t$ 20, 40 sono 10 e 20. Sia i termini che le differenze sono in rapporto doppio.

[6] Il riferimento è alla particolarità della proporzione geometrica notata in II. 25. 3. In questo caso, la differenza tra 10 e 20 è l'intero di 10 e la metà di 20; quella tra 20 e 40 è l'intero di 20 e la metà di 40. Se entrambe le differenze sono viste in relazione alla media o ai rispettivi estremi, la frazione non è costante; ma se una differenza è considerata come una frazione della media, mentre l'altra è considerata come una frazione dell'estremo, ci sarà "identità della frazione di eccesso e di difetto".

fissa, rispetto ai due termini pari. Infatti, come il termine maggiore[1] sta al minore, così la differenza dei termini maggiori sta a quella dei minori; per quanto le frazioni, viste come frazioni del termine maggiore, siano più piccole del termine maggiore, per queste lo stesso termine medio è più grande del termine minore quando sono viste come frazioni del termine minore; il rapporto tra i termini maggiori è maggiore e quello tra i termini minori è minore, cosa che non è vera per nessun'altra proporzione; e la somma degli estremi moltiplicata per la media è il doppio del prodotto degli estremi.

6 Se, invece, i due termini dati non sono pari ma dispari, come 5, 45, lo stesso numero, 25, farà la proporzione aritmetica; e la ragione è che i termini da una parte e dall'altra la superano e non la raggiungono di un numero uguale, mantenendo la stessa differenza quantitativa rispetto ad essa. Il 15 sostituito fa la proporzione geometrica, in quanto è il triplo e il sottotriplo di ciascuno rispettivamente; e se il 9 assume la funzione di termine medio dà l'armonica; infatti, per le parti del termine minore che supera, cioè i quattro quinti del minore, è anche minore del maggiore, se si considerano come parti del termine maggiore, perché anche questo è quattro quinti, e se si provano tutte le proprietà precedentemente menzionate del rapporto armonico si troverà che si adattano.

7 Questo sarà il vostro metodo per ottenere scientificamente i termini medi illustrati nelle tre proporzioni. Per i due termini dati, siano essi pari o dispari, troverete la media aritmetica[2] sommando gli estremi e mettendone la metà come media, oppure dividendo per 2 l'eccesso del maggiore sul minore e aggiungendolo al minore, avrete la media. Per quanto riguarda la media geometrica, se si trova la radice quadrata del prodotto[3] degli estremi, la si otterrà, oppure, osservando il rapporto[4] dei termini con l'uno

[1] Nelle serie io, 16, 40 . 40 _40-16 24
10 16 - 10 = 6 '

(6) La differenza tra 40 e 16, 24, è 4 di 40, mentre la differenza tra 16 e 10, 6, è 4 di 10.

*(c)* ">"-

*(d)* (40 + 10) X 16 = 2 X (40 X 10) = 800.

* In termini generali, la media aritmetica tra *a* e *b* è —, oppure, se *a* < *b*, è *a* + ----
_ 2 2

* In termini generali, la media geometrica è v'*ab*.

[4] Nicomaco enuncia la seguente proposizione in termini generali: dati o e *ar* -
*2*
formeranno una proporzione geometrica con essi e *a*: - = - : ar. Questo vale solo per
2 2

un altro, dividerlo per 2 e fare la media, ad esempio il doppio, nel caso di un rapporto quadruplo. Per la media armonica[1] , bisogna moltiplicare la differenza degli estremi per il termine minore e dividere il prodotto per la somma degli estremi, quindi aggiungere il quoziente al termine minore e il risultato sarà la media armonica.

## CAPITOLO XXVIII

Per quanto riguarda, dunque, le tre proporzioni celebrate dagli antichi, che abbiamo discusso in modo più chiaro e approfondito proprio per questo motivo, si incontrano frequentemente e in varie forme negli scritti di quegli autori. [2] Le forme successive[3] , invece, le dobbiamo solo epitomizzare, poiché non ricorrono frequentemente negli scritti antichi, ma sono state inserite solo per comodità di lettura.

proporzioni del tipo citato nell'esempio di Nicomaco, quelle in cui il rapporto è il quadruplo.
Infatti, se *a : = - : ar,* allora aV = - e 4 *r* - r* * o. Soltanto due valori di r soddisfano questo con-
*22* 4
dizione, 4 e o, di cui l'ultima non deve essere presa in considerazione quando si tratta del sistema numerico di Nicomaco. Nicomaco avrebbe dovuto ordinare di prendere la radice quadrata di r, non la sua metà; poi, a condizione che *r* fosse un quadrato perfetto, avrebbe potuto stabilire la proporzione,
*a:a^r* * flV^: *ar*. Il numero 4 è l'unico di cui la metà e la radice quadrata sono identiche (tra i numeri interi positivi).

[1] Dati *a* e *c* (se *a* > c), la media armonica è --- + c. Questa è uguale a ~~2 ac~~, che
*a* + *c a* + *c*
è stata data in precedenza come formula generale per la media armonica (si veda II. 25. 4) e sarebbe una formula più semplice da seguire.

[1] Cioè nelle sezioni delle opere di autori antichi lette e interpretate nelle scuole **(drayvutv/iar d)**.

* Teone di Smirne enumera anche altre proporzioni oltre alle prime e alle tre principali. Dice inoltre (p. 106, 13) che ci sono le 4sottostanti *(cioè all'*armonica; cfr. p. 115, 5 e segg.), la quinta e la sesta, e poi altre sei, sottostanti alle prime sei. Questa seconda serie di sei, tuttavia, viene lasciata senza spiegazione o illustrazione. Ai fini del conspectus, si possono riportare le formule generali per le proporzioni così come le danno i due autori, lasciando che *a* > *b* > *c* in ciascuno di essi:

| | NICOMACHUS | | THEON | |
|---|---|---|---|---|
| 1. Arithmetic | $a - b = b - c$ | (II. 23. 5) | $a - b = b - c$ | (p. 113, 18). |
| 2. Geometric | $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ | (II. 24) | $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ | (p. 114, 1). |
| 3. Harmonic | $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ | (II. 25) | $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ | (p. 114, 14). |
| 4. Subcontrary to harmonic | $\frac{a}{c} = \frac{b-c}{a-b}$ | (II. 28. 3) | $\frac{c}{a} = \frac{a-b}{b-c}$ | (p. 115, 5). |
| 5. Fifth form | $\frac{b}{c} = \frac{b-c}{a-b}$ | (II. 28. 4) | $\frac{c}{b} = \frac{a-b}{b-c}$ | (p. 115, 12). |
| 6. Sixth form | $\frac{a}{b} = \frac{b-c}{a-b}$ | (II. 28. 5) | $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b-c}$ | (p. 115, 20). |

conoscenza di essi e, per così dire, per la completezza della nostra
2 calcolo. Essi vengono da noi presentati in un ordine basato sulla loro opposizione ai tre archetipi già descritti, poiché sono modellati a partire da essi e hanno lo stesso ordine.

3 Il quarto, e quello chiamato subcontrario[1] , perché è opposto e ha proprietà opposte alla proporzione armonica, si ha quando, in tre termini, come il più grande sta al più piccolo, così la differenza dei termini più piccoli sta a quella dei più grandi, per esempio 3, 5, 6. Infatti, si vede che i termini confrontati sono in doppio rapporto, ed è evidente che è opposta alla proporzione armonica; infatti, mentre entrambe hanno gli stessi termini estremi e in doppio rapporto, nella prima la differenza dei termini maggiori rispetto a quelli minori conserva lo stesso rapporto degli estremi, ma in questa proporzione è proprio l'inverso, la differenza dei termini minori rispetto a quelli maggiori. Dovete sapere che la sua proprietà peculiare è questa. Il prodotto del termine maggiore[2] e di quello medio è il doppio del prodotto del termine medio e di quello minore; ad esempio, 6 per 5 è due volte 5 per 3.

4 Le due proporzioni, la quinta e la sesta, sono state entrambe modellate sulla base della geometria e differiscono tra loro in questo modo.

La quinta forma esiste[3] quando, tra tre termini, come il termine medio sta al minore, così la loro differenza sta alla differenza tra il maggiore e il medio, come in 2, 4, 5, poiché il 4 è il termine medio, il doppio del 2, il minore, e il 2 è il doppio dell'1 - la differenza dei termini minori rispetto a quella dei maggiori. Ciò che la rende contraria alla proporzione geometrica è che nella prima[4] , come il termine medio sta al minore, così l'eccesso del maggiore rispetto al medio sta all'eccesso del medio rispetto al minore, mentre in questa proporzione, al contrario, è la differenza del minore rispetto a quella del maggiore.

maggiore. Tuttavia, è peculiare di questa proporzione[1] che il prodotto del più grande per il termine medio sia doppio rispetto a quello del più grande per il più piccolo, poiché 5 volte 4 è due volte 5 volte 2.

La sesta forma[2] si ha quando, in un gruppo di tre termini, come il 5 maggiore sta al medio, così l'eccesso del medio sul minore sta all'eccesso del maggiore sul medio, per esempio 1, 4, 6, perché entrambi sono nel rapporto sesquialter. Anche in questo caso c'è una ragionevole causa per la sua opposizione al geometrico; anche qui, infatti, la somiglianza dei rapporti si inverte, come nella quinta forma.

Queste sono le sei proporzioni di cui si parla comunemente tra gli scrittori precedenti: i tre prototipi[3] sono durati dai tempi di Pitagora fino ad Aristotele e Platone, mentre gli altri tre, opposti ai primi, sono entrati in uso tra i commentatori e i settari che sono succeduti a questi uomini. Ma alcuni uomini hanno escogitato, spostando i termini e le differenze dei primi, altri quattro che non compaiono molto negli scritti degli antichi, ma sono stati toccati con parsimonia come un dettaglio troppo piacevole. Tuttavia, per non sembrare ignoranti, è necessario che questi vengano illustrati nel modo seguente.

Il primo di essi,[4] e il settimo nell'elenco di tutti, esiste quando, 7 come il termine maggiore sta al minore, così la loro differenza sta alla differenza dei termini minori, come 6, 8, 9, poiché al confronto il rapporto di ciascuno si vede essere il più sesquipedale.

L'ottava proporzione[1], che è la seconda di questo gruppo, si realizza quando, come il più grande sta al termine minore, così la differenza degli estremi sta alla differenza dei termini maggiori, come 6, 7, 9; anche in questo caso, infatti, i due rapporti sono sesquipedali.

Il nono [2] nell'elenco completo, e terzo nel numero di quelli inventati successivamente, esiste quando ci sono tre termini e qualunque sia il rapporto tra il medio e il minore, quello che ha anche la differenza degli estremi rispetto a quella dei termini minori, come 4, 6, 7.

Il decimo,[3] dell'elenco completo, che li conclude tutti, e il quarto della serie presentata dai moderni, si vede quando, tra tre termini, come la media sta al minore, così la differenza degli estremi sta alla differenza dei termini maggiori, come 3, 5, 8, perché è il rapporto superbipartito in ogni coppia.

Riassumendo, quindi, per facilitare la comprensione, si espongano i termini delle dieci proporzioni[4] * in un'unica illustrazione:

| | |
|---|---|
| Primo: 1, 2, 3 | Sesto: 1, 4, 6 |
| Secondo: 1, 2, 4 | Settimo: 6, 8, 9 |
| Terzo: 3, 4, 6 | Ottavo: 6, 7, 9 |
| Quarto: 3, 5, 6 | Nona: 4, 6, 7 |
| Quinta: 2, 4, 5 | Decimo: 3, 5, 8 |

## CAPITOLO XXIX

1 Mi resta8 da parlare brevemente della proporzione più perfetta, quella che è tridimensionale e le abbraccia tutte, e che è la più utile per ogni progresso nella musica e nella teoria della natura dell'universo. Solo questa potrebbe essere chiamata propriamente e veramente armonia piuttosto che gli altri, poiché non è un piano, né è legato da un solo termine medio, ma da due, così da essere esteso in tre dimensioni[1], così come poco fa è stato spiegato che il cubo è armonia. Quando, dunque, ci sono due termini estremi, entrambi di tre dimensioni, o numeri moltiplicati tre volte per se stessi, così da essere un cubo, o numeri moltiplicati due volte per se stessi e una volta per un altro numero, così da essere "travi" o "mattoni", o i prodotti di tre numeri disuguali, così da essere scaleni, e tra di essi si trovano altri due termini che conservano gli stessi rapporti agli estremi alternativamente e insieme,[2] in modo tale che, mentre uno di essi conserva la proporzione armonica, l'altra completa l'aritmetica, è necessario che in una tale disposizione dei quattro la proporzione geometrica appaia,[3] all'esame, mescolata con entrambi i termini medi - come il più grande è4 al terzo rimosso da esso, così è il secondo

[1] Oppure, "tre intervalli*"; per il senso, cfr. IT. 24. 6.

[1] Ast commenta così le parole tradotte (**aXXd{, dpa/uif): " *iraWdt* est permutato s. inverso ordine, et drajiif promiscue s. inter se; *drapl(* medii termini 8 et 9 [riferendosi all'esempio 6, 8, 9, 12] ad extremos 6 et 12 ita se habent, ut aequalem inter se servent proportionem; 8 enim ad 6 sesquitertiam habet rationem, ut 12 ad 9; inverso autem ordine 12 ad 8 ita se habet, ut 9 ad 6; utriusque enim ratio est sesquialtera".** Ast sembra intendere "alternativamente" o "per alternanza" con "permutato sive inverso ordine" (* 4mXXd{), come dimostra la sua illustrazione. fraXXdf è così usato in II. 21. 6, ma nella stessa sezione *dpa/xlt* è usato esattamente nello stesso modo, entrambi significano "per alternanza "* . 21. 6, oppure che fvaXXdf significhi "alternativamente" e drapi( qualcos'altro, "direttamente "* forse, come implicherebbe Ast. È abbastanza certo che *ira\\d£* significhi alternativamente. Cfr. T. L. Heath su Euclide, V. Def. 12: "La parola rfraXXd£ è naturalmente un termine comune che non ha un riferimento esclusivo alla matematica. Ma questo stesso uso in riferimento alle proporzioni ricorre già in Aristotele, *Anal. Postal.* 5. 74a 18, xal *rd drd\oyor 6ri iraWdt,* 'e che una proporzione (è vera) alternativamente, o *alternando*.* Usato con \6yot come in questo caso, l'avverbio d*aXXd{ ha il senso di un aggettivo, 'alternato*; lo abbiamo già usato in modo simile per 'angoli alternati' (ol *iwaWdt ywrlcu)* nella teoria delle parallele.'* È anche chiaro che ro^t *a&robs*
*\6yovt* si riferisce alla proporzione geometrica, non a quella armonica e aritmetica a cui si fa riferimento dopo *fore,* per
\Non si usa la relazione esistente tra i termini della proporzione aritmetica. Ho tradotto *dva^* 'insieme* ma con una certa diffidenza, ritenendo che il senso sia approssimativamente quello dato da Ast.

[1] Una proporzione di questo tipo ha la forma *a*, - --, 6. Queste formeranno una proporzione geometrica.
$a + o$ 2
perché il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi. Nicomaco specifica inoltre che sia *a* che *b* devono essere delle forme generali *m?*$_t$ m*n o *Imn.* Nel dare il suo esempio considera l'unità un fattore. Boezio, II. 54, descrive così questa proporzione: *Hate aulem huiusmodi invenietur, si duobus terminis constitutis, qui ipsi tribus creverint intervallis, longitudine latitudine et profundi-talty duo huiusmodi termini medii fuerinl constituti et ipsi tribus intervallis notati*$_y$ *qui vel ab aequo-libus per aequalcs aequaliter sint producti vel ab inoequalibus ad inaequalia aequaliter, vel ab in-aequalibus ad aequalia aequaliter vel quolibet alio modo, alquc ita*$_t$ *cum armonicam proportionem custodianty alio tamen modo comparati faciant arithmeticam medietatem, hisque geometrica medietas*$_t$ *quae inter utrasque versatur*$_t$ *deesse non possit.*

[4] La moda greca di contare, cioè di contare in entrambi i sensi, è usata nella specificazione di questi termini. Per alternanza" qui è *tu*£ybrip* "a incastro o a intreccio*; praticamente equivalente a 4*aXXd£.

dal quarto, perché in questo modo il prodotto delle medie è uguale al prodotto degli estremi. E ancora, se si dimostra che il termine maggiore differisce da quello successivo per la quantità con cui quest'ultimo differisce dal termine minore, tale serie diventa una proporzione aritmetica e la somma degli estremi è il doppio della media. Ma se il terzo termine dal più grande supera ed è superato dalla stessa frazione degli estremi, è armonico e il prodotto della media per la somma degli estremi è il doppio del prodotto degli estremi.

3 Un esempio di questa proporzione è 6, 8, 9,12. 6 è un numero scaleno, derivato da 1 per 2 per 3, e 12 deriva dalla moltiplicazione successiva di 2 per 2 per 3; dei termini medi il minore deriva da 1 per 2 per 4, e il maggiore da 1 per 3 per 3. Gli estremi sono sia solidi che tridimensionali, e i medi sono della stessa classe. Secondo la proporzione geometrica, come 12 è uguale a 8, così 9 è uguale a 6; secondo l'aritmetica, come 12 supera 9, di tanto 9 supera 6; e secondo l'armonica, per la frazione di cui 8 supera 6,[1] vista come frazione di 6, 8 è superato anche da 12, vista come frazione di 12.

4 Inoltre 8:6 o 12 :9 è il diatessaron, nel rapporto sesquiterziano; 9:6 o 12 :8 è il diapente nel sesquialter; 12 :6 è il diapason nel doppio. Infine, 9:8 è l'intervallo di un tono, nel rapporto di superottava, che è la misura comune di tutti i rapporti in musica, in quanto è anche la più familiare, perché è anche la differenza2 tra il primo e i più elementari intervalli.

5 E che questo sia sufficiente per quanto riguarda i fenomeni e le proprietà di numero, per una prima *Introduzione*.

[1] 8 supera 6 di 2, o di ^ di 6; 12 supera 8 di 4, o di | di 12; quindi 6,8,12 è una serie armonica.

[3] Boezio ha la seguente spiegazione: *unde notum est, quod inter diatessaron et diapente consonantiarum tonus differentia est, sicut inter sesquitertiam et sesquialteram proportionem sola est epogdous differentia* (II. 54).